

---

**Włodzimierz Krysicki**

**Keine Angst vor  $x$  und  $y$   
Quadratische Gleichungen und  
Gleichungssysteme**

Übersetzung und Bearbeitung: Heinrich Schwarz  
1984 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig  
MSB: Nr. 119

Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

---

## **Vorwort für die deutschsprachige Ausgabe**

Dieses Schülerbuch erschien erstmals 1970 in polnischer Sprache, und in meinem Heimatland wurden bisher mehr als 80000 Exemplare verkauft. Vor allem Schüler, Lehrer sowie am Lösen quadratischer Gleichungen und Gleichungssysteme Interessierte arbeiteten seither mit diesem Buch.

Ich freue mich, dass nun auch eine Fassung in deutscher Sprache vorliegt und als Band in die Reihe "Mathematische Schülerbücherei" aufgenommen wurde.

Die Übersetzung ins Deutsche - basierend auf der vierten Auflage - wurde rechtzeitig vor dem Internationalen Mathematikerkongress fertiggestellt, so dass die letzten Absprachen im August 1983 in Warschau getroffen werden konnten.

Bei der Arbeit mit diesem Buch wünsche ich allen Lesern viel Freude!

Warschau, August 1983

W. Krysicki

## Inhaltsverzeichnis

1	Historische Vorbemerkungen	4
2	Einfachste Gleichungen zweiten Grades	12
3	Allgemeine Form der quadratischen Gleichung	16
4	Aufstellen der Gleichung bei gegebenen Wurzeln - Wurzelsatz von Vieta	26
5	Wir lösen quadratische Gleichungen im Kopf	33
6	Wir lösen Aufgaben mit einer Unbekannten	35
7	Wir erraten eine gedachte Zahl	42
8	Quadratische Funktion und kanonische Darstellung	43
9	Untersuchung des Wertebereichs der quadratischen Funktion	46
10	Produktdarstellung der quadratischen Funktion	50
11	Rechtwinkliges Koordinatensystem	53
12	Graph einer Funktion zweiten Grades. Wie lösen wir eine quadratische Gleichung graphisch?	56
13	Vorzeichen der Werte einer quadratischen Funktion	61
14	Quadratische Ungleichungen	66
15	Gleichungssysteme. Wie wurde ein Gleichungssystem vor viertausend Jahren gelöst?	69
16	Wir lösen Anwendungsaufgaben mit zwei Unbekannten	74
17	Irrationale Gleichungen	78
18	Lösungen der Übungen	84

# 1 Historische Vorbemerkungen

Häufig begegnet man noch der Meinung, dass Algebra dasselbe sei, wie das Rechnen mit Buchstaben - aber das ist ein Irrtum! Die Buchstabenrechnung mit der Algebra gleichzusetzen ist, gelinde gesagt, ein großes Missverständnis; was ist Algebra aber dann?

Die Algebra gehört Wohl zu den ältesten und umfangreichsten Gebieten der Mathematik. Ihr Name leitet sich aus dem Titel des Werkes des arabischen Gelehrten al-Chwarismi (780-etwa 850 u.Z.) "Hisab fil-dschabr wal-mukabala" ab. Das Wort "aldschabr" bedeutet sinngemäß Wiederherstellung, Ergänzung.

Im Laufe der Jahrhunderte hat die Algebra viele Metamorphosen erfahren, und ihre Anwendungsbereiche vergrößerten sich ständig. Anfangs war sie die Theorie der Lösung von Gleichungen, und wir verstehen die Algebra im klassischen Sinne deshalb auch als die Wissenschaft von den Gleichungen. Weil die Operation (eine Unbekannte von einer Seite einer Gleichung auf die andere Seite zu bringen), von der die Algebra ihren Namen ableitete, bei der Auflösung von Gleichungen ständig vorkommt, war diese Bezeichnung durchaus gerechtfertigt.

Um Gleichungen zu lösen, erwies es sich als nützlich, mit Buchstaben als Symbolen für Unbekannte zu rechnen. Als man aber feststellte, dass mit Buchstaben nicht nur dann gerechnet werden kann, wenn sie Unbekannte in Gleichungen darstellen, zählte man alle Betrachtungen mit Symbolen für Veränderliche zur Algebra, im Unterschied zu Rechnungen mit konkreten Zahlen, die bekanntlich zur Arithmetik gerechnet werden. Die noch oft zu hörende Formulierung, dass die Algebra die Theorie des Rechnens mit "allgemeinen Zahlen" sei, ist falsch, denn es gibt keine "allgemeinen Zahlen"; es gibt nur Variable in Gleichungen, die wir Unbekannte nennen, und Symbole für Zahlen.

Die moderne Algebra ist, weit über die klassische Algebra hinausreichend, ein Gebiet der Mathematik geworden, das praktisch mit allen übrigen Gebieten verflochten ist. Gegenstand der algebraischen Forschungen sind so abstrakte Gebilde wie: Gruppen, Ringe, Körper, Strukturen, Boolesche Algebren, Vektorräume u.a.

Die einzelnen Teile der modernen Algebra finden breite Anwendung nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der Physik, der Technik und auch in der Theorie elektronischer Rechenmaschinen. Algebraische Methoden werden mit Erfolg in der Mathematischen Logik und in geometrischen Disziplinen verwendet.

Die Algebra, wie sie an Oberschulen und in den meisten nichtmathematischen Fachrichtungen der Hochschulen gelehrt wird, umfasst in der Regel nur einen Teil jener Fakten, die der klassischen Algebra zugerechnet werden. Dazu gehören etwa das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, die Behandlung der komplexen Zahlen, das Studium der Eigenschaften von Polynomen und Ungleichungen.

Bevor die Algebra den gegenwärtigen Stand ihrer Entwicklung erreichte, mussten Jahrtausende vergehen. Anfängen der Verwendung von Symbolen bei mathematischen Betrachtungen begegnen wir schon vor 4000 Jahren bei den Ägyptern. Das beweist der

"Papyrus Rhind<sup>1</sup>" des Hofschreibers Ahmes (17. Jh. v.u.Z.). Er nennt elf Aufgaben, deren Lösungen auf einfache Gleichung führen, wobei die Unbekannte durch das Wort "hau" bezeichnet wird. Eine der Aufgaben hat folgenden Inhalt:

"Ich passe dreimal in ein Gefäß. Füge ich ein Drittel meiner Größe zu dieser hinzu und dazu ein Drittel eines Drittels meiner Größe und noch ein Neuntel meiner Größe, so ergibt sich eins."

Auch wer diese Aufgabe nicht lösen will, wird leicht feststellen, dass sie sich von heutigen Schulaufgaben dieses Typs nicht wesentlich unterscheidet.

Nicht nur die Ägypter haben im Altertum Gleichungen gelöst, auch die Babylonier haben das mit viel Geschick getan. Vor einigen Jahrzehnten fand man eine Anzahl babylonischer Tontafeln, die mit Keilschrift versehen waren.

Bei der Entzifferung stellte man fest, dass sie mathematische Gleichungen enthalten, in denen die jeweilige Unbekannte in der zweiten oder dritten Potenz auftritt. Obwohl die Tafeln die Lösungen der Aufgaben nicht enthalten, können wir doch annehmen, dass die Babylonier sie durchaus zu lösen vermochten.

Das ist eine erstaunliche Tatsache. Weitere 3000 Jahre mussten vergehen, bevor die Arbeiten der Babylonier auf dem Gebiet der Gleichungen dritten Grades weitergeführt werden konnten.

Mit Gleichungen und Gleichungssystemen ersten Grades, aber auch mit Gleichungen zweiten Grades, haben sich wahrscheinlich schon 2000 Jahre vor unserer Zeitrechnung auch die Chinesen befasst.

Zur Verwendung von Buchstaben und zur weiteren Entwicklung der Algebra trugen auch die Griechen bei. Vor allem der hervorragende Mathematiker Diophantos von Alexandria (etwa um 250 u.Z.) ist hier zu nennen. Sein Hauptwerk "Arithmetik", von dessen wahrscheinlich insgesamt dreizehn Büchern sechs erhalten geblieben sind, enthält 189 Gleichungen mit Lösungen.

Es sind meistens unterbestimmte Gleichungen mit im allgemeinen vielen Lösungen. Die "Arithmetik" des Diophantos ist ein Beweis für die genialen algebraischen Ergebnisse dieses Mathematikers. Er löste Gleichungen bis dritten Grades in einem wesentlich breiteren Bereich als die Babylonier; die Unbekannte bezeichnete er mit speziellen Buchstaben.

Er benutzte schon das Symbol des "Abziehens" und wendete in breitem Maße verbale Abkürzungen für einzelne Bezeichnungen und Operationen an.

Diophantos ist demnach der erste bekannte Autor, der die algebraische Sprache benutzt hat. Obwohl seine Bezeichnungen nicht der gegenwärtigen algebraischen Symbolik entsprechen, markierten sie trotzdem den Übergang von der sogenannten rhetorischen zur symbolischen Algebra.

Den Gegenstand der Betrachtungen des Diophantos zählen wir heute zur Theorie der unterbestimmten Gleichungen, und einzelne Gleichungstypen nennen wir Diophantische Gleichungen.

---

<sup>1</sup>A.H. Rhind (1833-1863) hat diesen Papyrus erworben.

Das Werk des Diophantos fand über längere Zeit keine eigentlichen Fortsetzer. Aus seinem Werk schöpften im Mittelalter die Araber, und es war auch in Indien bekannt. Zu vollem Erfolg kam es aber erst im 17. Jahrhundert.

Wie sehr der Name Diophantos mit dem Lösen von Gleichungen verbunden ist, bezeugt das berühmte "Epitaphium des Diophantos", eine Textaufgabe in Versform auf seinem Grabmal:<sup>2</sup>

"Hier dies Grabmal deckt Diophantos. Schaut das Wunder!  
Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.  
Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;  
Noch ein Zwölftel dazu, sprosst' auf der Wange der Bart;  
Dazu ein Siebentel noch, da schloss er das Bündnis der Ehe,  
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.  
Wehe, das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre  
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.  
Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer  
Von sich scheuchend auch er kam an das irdische Ziel."

Wir überlassen die Lösung dieser Aufgaben dem Leser und verraten nur, dass der berühmte Grieche 84 Jahre alt wurde.

Nach Diophantos ist uns kein hervorragender Mathematiker in Griechenland bekannt; die Epoche der berühmten griechischen Kultur ging zu Ende.

In dieser Zeit entstand ein neues Zentrum mathematischen Denkens: Indien. Zur Blüte der Mathematik in diesem Teil der Erde trugen die Arbeiten von Aryabhata (geb. um 476) und Brahmagupta (598-660), der die negativen Zahlen einführte, sowie Bhaskara II. (1114-1185), dem Autor der Aufgabensammlung "Lilavati", bei.

Die Inder bedienten sich einer reichen algebraischen Sprache. Sie führten Symbole für die einzelnen Operationen ein, benutzten Klammern, und bei Überlegungen mit mehreren Unbekannten verwendeten sie einen Buchstaben in verschiedenen Farben (chinesischer Einfluss).

Sehr interessant sind ihre Textaufgaben zur Aufstellung von Gleichungen, die in poetischer Form gehalten sind. Eine Textaufgabe, deren Urheberschaft Bhaskara II. zugeschrieben wird, findet der Leser in diesem Buch.

Den Nachlass der antiken und indischen Mathematik haben uns die Gelehrten des mittelalterlichen Orients - Mittelasiens, Mesopotamiens und Nordafrikas - überliefert. Ihre wissenschaftliche Sprache war arabisch, und daher wird diese Epoche in der Geschichte der Mathematik die arabische Epoche genannt.

In Wirklichkeit aber war vom 9.-15. Jahrhundert Mittelasien das Hauptzentrum der wissenschaftlichen Tätigkeit. Hier wirkten so hervorragende Gelehrte wie der berühmte usbekische Mathematiker und Astronom des 9. Jahrhunderts al-Chwarismi, der große Enzyklopädist al-Biruni (973-1048), der bekannte Astronom Ulug Beg (1394-1449) und

---

<sup>2</sup>Zitiert nach Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. I. Leipzig: Teubner-Verlag 1880, S. 395/396.

viele andere.

Von den genannten Namen verdient al-Chwarismi besondere Beachtung. Wie eingangs erwähnt ist er der Autor jenes Werkes, aus dessen Titel das Wort "Algebra" abgeleitet ist.

Mit al-Chwarismi begann die eigentliche Entwicklung der Algebra als eines selbständigen Gebietes der Mathematik. Die Mathematiker des mittelalterlichen Orients haben sich große Verdienste bei der Bewahrung des mathematischen Erbes des Altertums erworben. Sie gaben in Übersetzungen die Werke der großen griechischen Philosophen und Mathematiker heraus und erweiterten das Wissen der Inder. Sie waren schließlich im 12. Jahrhundert die Mittler, von denen die europäischen Gelehrten, vor allem die Italiener, das mathematische Gedankengut übernahmen.

Der Beitrag der Italiener zur Entwicklung der Algebra in diesem Zeitraum war ohne Zweifel sehr groß. Dazu trug im 13. Jahrhundert in besonderem Maße Leonardo Fibonacci (1170 bis um 1250) bei. Er ist der Autor des Werkes "Liber abaci" ("Buch vom Abakus"), in dem den Problemen der Algebra breiter Raum gewidmet ist.

Die italienischen Mathematiker dieser Epoche führten Abkürzungen und algebraische Symbole ein und bedienten sich der Symbole "p" und "m" für die Worte "plus" und "minus".

Schließlich verwendeten sie wieder negative Zahlen, die bereits von Diophantos und den Indern eingeführt worden und lange in Vergessenheit geraten waren.

Die Blüte der italienischen Mathematik fiel in das 15. und 16. Jahrhundert. Damals wurden die norditalienischen Städte Genua, Pisa, Venedig, Mailand und Bologna zu wissenschaftlichen Zentren. Unter diesen Städten schob sich bald Bologna an die erste Stelle, mit einer der größten und berühmtesten Universitäten des 16. Jahrhunderts.

Hier lehrten Mathematiker wie Scipione del Ferro (1465-1526), Niccolo Tartaglia (um 1500-1557) und Girolamo Cardano (1501-1576). Sie arbeiteten an der Lösung kubischer algebraischer Gleichungen.

S. del Ferro fand als erster eine allgemeine Lösungsformel, danach N. Tartaglia und schließlich G. Cardano, der die Ergebnisse seiner Forschungen, im Gegensatz zu seinen Vorgängern, publizierte. In seiner grundlegenden Arbeit mit dem Titel "Artis magnae sive de regulis algebraicis" veröffentlichte er auch die Lösungen N. Tartaglias und die Methode Ludovico Ferraris (1522-1565), Gleichungen vierten Grades auf kubische Gleichungen zurückzuführen.

Obwohl G. Cardano der obigen Arbeit seinen Platz in der Geschichte der Mathematik verdankt, ist sie nicht sein einziges wichtiges Werk. Sein Buch "Liber deludo aleae" befasst sich mit Glücksspielen. Es enthält die erste systematische Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und das ein Jahrhundert vor Blaise Pascal (1623-1662) und Pierre de Fermat (1601 bis 1665).

Die größten Verdienste bei der Einführung der vollen Buchstabenrechnung in die Algebra hat sich der französische Mathematiker Francois Viète (1540-1603) erworben. Bis dahin war auf dem Gebiet der Algebra tatsächlich schon eine gewisse Entwicklung

der Symbolik zu beobachten, auch war bereits die Lösung von Gleichungen dritten und vierten Grades durch Wurzelziehen bekannt, aber erst F. Viète schuf die Grundlagen einer allgemeinen Wissenschaft der algebraischen Gleichungen und erwarb sich dadurch den Namen des Vaters der gegenwärtigen Algebra.

Als erster führte er die Bezeichnung mit Buchstaben nicht nur für unbekannte Größen ein (das wurde schon vor ihm angewandt), sondern auch für gegebene Größen.

Diesem Gelehrten ist es weitgehend zu danken, dass es möglich wurde, die Eigenschaften von Gleichungen und ihrer Lösungen durch allgemeine Formeln auszudrücken. F. Viète gab auch Lösungen für Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades an, womit er die Verbindung zu den vor ihm von S. Ferro und L. Ferrari angegebenen Methoden schuf. Er führte schließlich auch die heute allen Schülern bekannten Gleichungen für die Summe und das Produkt der Wurzeln quadratischer Gleichungen ein.

Gegen Ende des 16. Jahrhunderts zeichnete sich der Abschluss des Prozesses der Herausbildung der Grundlagen der algebraischen Sprache ab. Bis zu dieser Zeit konnten in den mathematischen Lehrbüchern die einzelnen Probleme nicht allgemein behandelt werden, und man musste deshalb mit einer Vielzahl von Beispielen operieren, wodurch die Bücher schwer lesbar wurden.

Sie waren daher oft schwer verständlich, verwirrend und wenig mitteilbar. Heute sind sie dagegen mit Hilfe der Anwendung algebraischer Gleichungen überschaubar und für breite Kreise zugänglich.

Im Jahre 1637 begann mit dem Erscheinen des Werkes "La Geometria" von René Descartes (1596-1650) die Analytische Geometrie, die sich später als eine der Grundlagen für die fruchtbare Entwicklung der Analysis erwies. In diesem Werk stellte R. Descartes auch die Grundlagen der Algebra dar.

Erstmals führte er die Begriffe Variable, Funktion sowie das rechtwinklige Koordinatensystem ein, das bis heute den Namen "Kartesisches Koordinatensystem" trägt. Die durch algebraische Gleichungen beschreibbaren Kurven teilte er in Abhängigkeit vom höchsten Grade der beiden Variablen in Klassen ein.

R. Descartes bezeichnete Unbekannte, ähnlich wie wir heute, mit den letzten Buchstaben des Alphabets:  $x, y, z, u, v \dots$ . Er vereinfachte beträchtlich die Symbolik F. Vietes, verwendete bei der Lösung von Gleichungen negative Zahlen, führte die Zeichen "+" und "-" als Vorzeichen für positive und negative Zahlen, die Potenz  $x \cdot x = x^2$  und das Symbol  $\infty$  für unendliche Größen ein.

Das Werk des R. Descartes übte einen entscheidenden Einfluss auf die weitere Entwicklung der Mathematik aus. Im Laufe von 150 Jahren entwickelten sich die Algebra und die Analytische Geometrie in der von ihm gewiesenen Richtung.

Nach R. Descartes trugen noch viele hervorragende Mathematiker durch ihre Arbeiten zur weiteren Entwicklung der Mathematik, darunter auch der Algebra, bei. Es sei hier nur an solche Gelehrte wie Pierre de Fermat erinnert, der eine Methode fand, Maxima und Minima algebraischer Funktionen zu bestimmen; an Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Isaac Newton (1643-1727), Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855), Leon-



hard Euler (1707-1783), Adrien Marie Legendre (1752-1833) und schließlich von den späteren an David Hilbert (1862-1943).

Zwei aber, die bisher noch nicht genannt wurden, verdienen es, hier ausführlicher behandelt zu werden: der Norweger Niels Henrik Abel (1802-1829) und der Franzose Evariste Galois (1811-1832).

N.H. Abel versuchte, angeregt durch seinen Lehrer, algebraische Gleichungen höheren als 4. Grades allgemein zu lösen. Schließlich glaubte Abel, dass es ihm gelungen sei, das Problem zu lösen. Als er aber einen Fehler entdeckte, kam er auf den erstaunlichen Gedanken, den Beweis zu versuchen, dass es eine solche Lösungsformel nicht geben kann.

Dabei hatte der 22jährige N.H. Abel Erfolg. Der durch den jungen Mathematiker erbrachte Beweis der Unmöglichkeit der Aufstellung einer allgemeinen Lösungsformel für algebraische Gleichungen höheren als 4. Grades durch Wurzelziehen war ein neuer Wegweiser auf dem Wege der Entwicklung der modernen Algebra.

Das geschah im Jahre 1824, nach fast 300jährigem Suchen der Antwort auf die Frage, wie die Wurzeln der Gleichung 5. Grades  $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$  und höheren Grades in allgemeiner Form dargestellt werden können.

Mit diesem Problem hatten sich auch so hervorragende Gelehrte wie L. Euler, G.W. Leibniz, C.F. Gauß und Paolo Ruffini (1765-1822) herumgeschlagen; keinem von ihnen aber gelang ein fehlerloser Beweis. Sie waren überzeugt, dass es nicht möglich ist, Lösbarkeit oder Unlösbarkeit des Problems zu entscheiden.

Man kann es daher bis zu einem gewissen Grade verstehen, dass der Beweis des jungen Norwegers in den Augen der auf der Höhe ihres Ruhmes stehenden damaligen Mathematiker keine Anerkennung fand. C.F. Gauß z.B., dem N.H. Abel seinen Beweis übersandte, hielt es nicht einmal für angebracht, dem jungen Mathematiker zu antworten, der sich erdreistete, nach so "hohen Ufern" zu greifen.

Ähnlicher Gleichgültigkeit begegnete N.H. Abel bei seinem Aufenthalt in Paris von Seiten der französischen Mathematiker, die nicht in der Lage waren, seine Überlegungen einzuschätzen. Die der französischen Akademie der Wissenschaften vorgelegte Arbeit wurde erst nach N.H. Abels frühem Tode (1829) angenommen und publiziert, und sie erschien in dem Moment, als ein Brief unterwegs war, der ihm einen Lehrstuhl für Mathematik in Berlin antrug.

Die wissenschaftlichen Untersuchungen N.H. Abels betrafen aber nicht nur die Algebra. Er befasste sich auch mit den Bereichen der Integralrechnung, die mit der Algebra am engsten verbunden waren.

In Analogie zu dem erwähnten Satz aus der Algebra bewies er in der Integralrechnung die Unmöglichkeit, Integrale bestimmter elementarer Funktionen mit Hilfe elementarer Funktionen darzustellen (wir verstehen unter elementaren Funktionen Polynome, ihre Quotienten, d.h. rationale Funktionen, trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrungen  $\arcsin x$  usw., logarithmische Funktionen, Exponentialfunktionen und nichtrationale Funktionen).

Diese Forschungen führten ihn zur Entdeckung der elliptischen und hyperelliptischen Funktionen. Die Integrale dieser Funktionen sind Sonderfälle der heute so genannten Abelschen Integrale (Integrale algebraischer Funktionen) und finden breite Anwendung.

Die Ergebnisse von N.H. Abel vertiefte und erweiterte ein weiterer genialer Mathematiker, der Franzose E. Galois. Er war am mathematischen Himmel ein Stern von außergewöhnlicher Leuchtkraft, ein Genie, das trotz seiner Jugend zu Ergebnissen gelangte, die ihm einen bleibenden Platz als Schöpfer der Grundlagen der modernen Algebra sichern.

Schon mit 15 Jahren fing er an, eigene Auffassungen zu formulieren. Als N.H. Abel bewies, dass es unmöglich ist, beliebige algebraische Gleichungen höheren als vierten Grades durch Wurzelziehen zu lösen, kam E. Galois als noch nicht zwanzigjähriger Schüler nicht nur zum gleichen Ergebnis, sondern er formulierte ein Problem von größter Tragweite für die Algebra, eines der schwierigsten und tiefgreifendsten in der Mathematik.

Es betraf die Suche nach einem Kriterium, das eine Antwort auf die Frage geben konnte, ob eine algebraische Gleichung gegebenen Grades mit Hilfe von Wurzeln lösbar ist. E. Galois debütierte wissenschaftlich in einer Zeitschrift; die Ergebnisse seiner Forschungen fasste er in einer wesentlich ausführlicheren Arbeit zusammen, die er der Akademie der Wissenschaften übersandte.

E. Galois hatte aber, ähnlich wie auch N.H. Abel, kein Glück. So berühmte Mathematiker wie Augustin Louis Cauchy (1789-1857) und Jean-Baptiste-Joseph de Fourier (1768-1830) bagatellisierten seine Arbeiten und leiteten seine Manuskripte nicht weiter. Als er dann erneut eine Arbeit einreichte, versah der hervorragende Mathematiker Simeon Denis Poisson (1781-1840) diese mit dem Vermerk: "Wir sind nicht einmal in der Lage, die bahnbrechenden Gedanken des Autors zu erfassen".

E. Galois arbeitete hauptsächlich an der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen. Sein wichtigstes Ergebnis war die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit einer Gleichung gegebenen Grades durch Wurzelziehen. Dazu schuf er eine völlig neue Theorie, heute Galoissche Theorie genannt.

Diese hatte einen entscheidenden Einfluss auf die Entwicklung nicht nur der Algebra, sondern der gesamten Mathematik des 19. Jahrhunderts, und ihre Gedanken und Methoden finden immer neue Anwendungen, z.B. in der modernen Quantenmechanik oder auch in der Kristallographie.

In diesem kurzen Abriss haben wir Wege genannt, welche die mathematische Denkweise seit den frühesten Zeiten auf dem Gebiet der Algebra gegangen ist. Wir haben dabei versucht, die außergewöhnlichen Bemühungen der Gelehrten aufzuzeigen, deren Beharrlichkeit, Begabung und Scharfsinn die Pfade der Entwicklung unseres Gebietes gewiesen haben, bis es sich heute in ein vielseitiges Werkzeug in der Hand der Gelehrten, Forscher und Techniker verwandelt hat.

Daher hegen wir auch die Hoffnung, dass der Leser beim Lösen der Aufgaben viel Vergnügen finden wird, und das um so mehr, als jede gelungene Lösung auch den Glauben an die eigene Kraft und an eigene Fähigkeiten weckt.

Die in diesem Buch enthaltenen Aufgaben sind entsprechend ihrem Schwierigkeitsgrad geordnet, von einfachen Problemen zu schwierigeren, aber immer darauf bedacht, die intellektuellen Möglichkeiten des Lesers nicht zu überfordern.

Deshalb wird er nach dem gründlichen Studium dieses Büchleins und nach dem selbstständigen Lösen aller Aufgaben auch mit jenen  $x$  und  $y$  arbeiten können, die manchmal zum Alptraum der Schüler werden.

Die Mathematik ist eine schöne, einfache und außergewöhnlich brauchbare Wissenschaft. In ihren Symbolen, Regeln und Sätzen sind Wahrheiten über die Welt und die in ihr geltenden Gesetze enthalten. Um das zu erkennen, muss man Gleichungen lösen können, und hierfür stellt das vorliegende Buch von Włodzimierz Kryszewski eine wertvolle Hilfe dar.

Tadeusz Twarogowski

## 2 Einfachste Gleichungen zweiten Grades

Wahrscheinlich stand der Mensch in seiner Geschichte erstmals vor der Notwendigkeit, eine quadratische Gleichung zu lösen, als er die Seitenlänge eines Quadrats bei gegebener Fläche berechnen wollte.

Beträgt die Fläche des Quadrats  $4 \text{ cm}^2$ , so ist jede Seite  $2 \text{ cm}$  lang, beträgt sie  $9 \text{ cm}^2$ , so haben wir die Seitenlänge  $3 \text{ cm}$ , und zur Fläche von  $16 \text{ cm}^2$  gehört die Seitenlänge von  $4 \text{ cm}$ .

Formulieren wir den letzten Fall etwas anders: es ist die Zahl  $x$  zu finden, deren Quadrat gleich 16 ist! Wir haben also die Gleichung

$$x^2 = 16 \quad (1)$$

zu lösen. Um den Zahlenwert zu finden, der diese Gleichung erfüllt, denken wir daran, dass die Quadrate zweier Zahlen des gleichen absoluten Betrages, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, gleich sind, z.B.  $5^2 = (-5)^2$ . Wir erhalten somit

$$x = -\sqrt{16} \quad \text{und} \quad x = +\sqrt{16}$$

die Gleichung (1) besitzt die beiden Wurzeln

$$x_1 = -4 \quad \text{und} \quad x_2 = +4$$

denn es ist  $(-4)^2 = (+4)^2 = 16$ .

Lösen wir nun die Gleichung  $2x^2 - 14 = 0$ .

Addieren wir das absolute Glied auf beiden Seiten, so erhalten wir  $2x^2 = 14$ , und nach Division durch 2 nimmt die Gleichung die Gestalt

$$x^2 = 7$$

an. Daraus erhalten wir zwei Werte für  $x$ , nämlich

$$x_1 = -\sqrt{7} \quad \text{und} \quad x_2 = +\sqrt{7}$$

In ähnlicher Weise erhalten wir bei der Lösung der Gleichung

$$4x^2 - 15 = 0$$

nacheinander  $4x^2 = 15$  und  $x^2 = \frac{15}{4}$ . Die Lösungen dieser Gleichung sind nicht rational:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{15}}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = +\frac{\sqrt{15}}{2}$$

Wenn wir sie mit einer bestimmten Genauigkeit angeben wollten, so hätten wir z.B.  $\sqrt{15}$  mit einer Genauigkeit von sagen wir 0,0001 zu berechnen und würden  $\sqrt{15} \approx 3,8730$  und damit

$$x_1 \approx -1,9365 \quad ; \quad x_2 \approx +1,9365$$

erhalten. Wir betrachten noch die Gleichung

$$3x^2 + 48 = 0$$

. Gehen wir wie oben vor, so erhalten wir

$$3x^2 = -48 \quad , \quad x^2 = -16$$

Die letzte Gleichung wird durch keine reelle Zahl  $x$  gelöst, denn das Quadrat einer reellen<sup>3</sup> Zahl kann nicht negativ werden.

Alle bisher gelösten Gleichungen lassen sich in der allgemeinen Form

$$ax^2 + c = 0 \tag{2}$$

darstellen, wobei  $c$  eine beliebige positive oder negative Zahl oder auch die Null sein kann, der Koeffizient  $a$  aber ungleich null ist. Um diese Gleichung zu lösen, addieren wir  $-c$  auf beiden Seiten

$$ax^2 = -c$$

und teilen beide Seiten durch  $a \neq 0$

$$x^2 = -\frac{c}{a} \tag{3}$$

Man muss jetzt folgende Fälle unterscheiden:

1. Die Zahlen  $a$  und  $c$  haben ungleiche Vorzeichen, der Bruch  $\frac{c}{a}$  ist dann negativ, d.h.  $-\frac{c}{a} > 0$ , und Gleichung (3) und damit auch Gleichung (2) besitzen zwei Lösungen (auch Wurzeln genannt)

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad ; \quad x_2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Die Lösungsmenge ist zweielementig.

2. Die Zahlen  $a$  und  $c$  haben gleiche Vorzeichen; der Bruch  $\frac{c}{a}$  ist dann positiv, d.h.  $-\frac{c}{a} < 0$ , und Gleichung (3) und damit auch Gleichung (2) haben keine reellen Wurzeln. Von einer solchen Gleichung sagen wir, dass sie widersprüchlich und ihre Lösungsmenge leer ist.

3. Ist  $c = 0$ ,  $a \neq 0$ , dann wird  $\frac{c}{a} = 0$ , und wir sagen, dass Gleichung (3) und damit auch Gleichung (2) eine Doppelwurzel<sup>4</sup> gleich null besitzt

$$x_{1,2} = 0$$

Die Menge der Lösungen ist einelementig.

---

<sup>3</sup>Man kennt in der Mathematik sogenannte "imaginäre Zahlen" der Form  $ib$ , wobei  $i$  die "imaginäre Einheit",  $b$  eine reelle Zahl und  $(ib)^2 = -b^2 < 0$  mit  $b \neq 0$  ist.

<sup>4</sup>Wir nennen die Lösung eine Doppelwurzel (Doppellösung), weil  $x_1 = -\sqrt{0} = 0$ ,  $x_2 = +\sqrt{0} = 0$  ist, d.h.  $x_1 = x_2 = 0$ .

Befassen wir uns nun mit Gleichungen anderer Form, etwa der Gleichung

$$2x^2 - 15x = 0$$

Wir klammern  $x$  aus

$$x(2x - 15) = 0$$

und haben auf diese Weise ein Produkt erhalten, das gleich null sein soll. Ein Produkt ist aber genau dann null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist.

Es muss also entweder der erste Faktor  $x$  oder der zweite Faktor  $(2x - 15)$  gleich null sein:

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad 2x - 15 = 0$$

Die erste Gleichung ergibt die Wurzel

$$x_1 = 0$$

Die andere Gleichung liefert die zweite Wurzel der Gleichung

$$x_2 = 7,5$$

Auf die gleiche Weise können wir jede quadratische Gleichung ohne absolutes Glied lösen. Die allgemeine Form einer derartigen Gleichung lautet:

$$ax^2 + bx = 0 \quad , \quad a \neq 0 \quad (4)$$

Zuerst wird  $x$  ausgeklammert

$$x(ax + b) = 0$$

und anschließend wird jeder Faktor gleich null gesetzt

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad ax + b = 0$$

Damit erhalten wir zwei Wurzeln der Gleichung (4)

$$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Gleichungen der Form  $ax^2 + c = 0$  oder  $ax^2 + bx = 0$  nennen wir unvollständige quadratische Gleichungen.

### Übungen

Es sind die Wurzeln folgender Gleichungen zu ermitteln!

1.a.)  $x^2 - 1225 = 0$ ,

b.)  $x^2 - 18 = 0$ ,

c.)  $25x^2 - 81 = 0$ ,

d.)  $3x^2 + 625 = 0$ ,

e.)  $0,01x^2 - 9 = 0$ .

2. a)  $2x^2 - 17x = 0$ ,

b)  $3x^2 + 21x = 0$ ,

c)  $100x^2 = 9x$ ,

d)  $0,001x^2 = 10x$ .

3. a)  $x^2 - x = 0$ ,

b)  $0,01x^2 - x = 0$ ,

c)  $0,001x^2 - x = 0$ ,

d)  $0,00001x^2 - x = 0$ .

Die Wurzeln der letzten vier Gleichungen sollen verglichen werden. Ändern sich beide Wurzeln? Wie ändert sich eine der Wurzeln, wenn der Koeffizient  $a$  in der Gleichung  $ax^2 + bx = 0$  gegen null abnimmt?

### 3 Allgemeine Form der quadratischen Gleichung

Aufgabe. Es ist die Zahl zu finden, deren Quadrat um 1 kleiner ist als das Doppelte dieser Zahl.

Nennen wir die gesuchte Zahl  $x$ , dann muss

$$x^2 = 2x - 1$$

sein. Daraus erhalten wir

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (1)$$

Die linke Seite ist die uns wohlbekannte Auflösung des Quadrats  $(x - 1)^2$ ; Gleichung (1) kann demnach auch in der Form

$$(x - 1)^2 = 0 \quad (2)$$

geschrieben werden.

Da nun die Null die einzige Zahl ist, deren Quadrat null ist, so schließen wir, dass

$$x - 1 = 0$$

d.h.  $x = 1$ , ist. Die Gleichung (1) besitzt demnach die eine Wurzel  $x = 1$ . Wir nennen sie wieder eine Doppelwurzel, denn wir können statt (2) auch schreiben

$$(x - 1)(x - 1) = 0$$

Setzen wir den ersten Faktor  $(x - 1)$  gleich null, so erhalten wir die Wurzel  $x_1 = 1$ , und auch der zweite Faktor ergibt als zweite Wurzel  $x_2 = 1$ .

Jene Zahl also, deren Quadrat um 1 kleiner ist als ihr Zweifaches, ist die Zahl 1.

Aufgabe. Welche Zahl ergibt multipliziert mit der um 6 größeren Zahl das Produkt -9?

Wir nennen die gesuchte Zahl  $x$ ; die um 6 größere Zahl ist dann  $(x + 6)$ , und es soll sein

$$x(x + 6) = -9 \quad (3)$$

Führen wir die Multiplikation durch und addieren 9, so erhalten wir die Gleichung

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

Wir schreiben sie in der Form

$$(x + 3)^2 = 0$$

und schließen daraus, dass

$$x + 3 = 0$$

sein muss. Die Doppelwurzel der Gleichung (3) ist demnach  $x_{1,2} = -3$ ; die gesuchte Zahl heißt -3.

Wir lösen nun die Gleichung

$$9x^2 + 30x + 25 = 0 \quad (4)$$



Dabei beachten wir, dass der erste Ausdruck  $9x^2$  gleich  $(3x)^2$  und der dritte Ausdruck  $25 = 5^2$  ist und dass außerdem für den mittleren Ausdruck  $30x$  gilt

$$30x = 2 \cdot 3x \cdot 5$$

Die Gleichung (4) lässt sich deshalb in der Form

$$(3x + 5)^2 = 0$$

schreiben, und daraus erhalten wir

$$3x + 5 = 0$$

Die Lösung der letzten Gleichung ergibt als Doppelwurzel der Gleichung (4)

$$x_{1,2} = -\frac{5}{3}$$

Aus den bisher gerechneten Beispielen ziehen wir den Schluss:

Ist die linke Seite einer quadratischen Gleichung ein vollständiges Quadrat (und ist die rechte Seite null), so hat die Gleichung eine Doppelwurzel.

Aufgabe. Wenn wir zum Quadrat einer Zahl 3 addieren, so erhalten wir das Vierfache dieser Zahl. Wie lautet die Zahl?

Wir nennen die unbekannte Zahl  $x$ , es muss dann sein

$$x^2 + 3 = 4x$$

und wir erhalten die Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \tag{5}$$

Die beiden ersten Ausdrücke  $x^2 - 4x$  sind die ersten beiden Glieder der Auflösung des Quadrats

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \tag{6}$$

das letzte Glied in der Gleichung (5) ist aber 3, in der Auflösung (6) dagegen 4. Addieren wir 1 auf beiden Seiten der Gleichung (5), so ist die linke Seite der Gleichung (5) identisch mit der rechten Seite der Gleichung (6). Wir erhalten demnach

$$x^2 - 4x + 4 = 1 \quad \text{oder} \quad (x - 2)^2 = 1$$

Dies gilt, wenn

$$x - 2 = -1 \quad \text{oder} \quad x - 2 = +1$$

ist. Aus der ersten Gleichung folgt

$$x = -1 + 2, \quad \text{d.h., es ist} \quad x_1 = 1$$

und aus der zweiten Gleichung

$$x = 1 + 2 \quad \text{folgt} \quad x_2 = 3$$

Wir haben zwei Werte als Wurzeln der Gleichung (5) erhalten und prüfen die Richtigkeit der erhaltenen Ergebnisse, indem wir in die Gleichung (5) für  $x$  die erhaltenen Werte  $x_1$  und  $x_2$  einsetzen.

Für  $x = 1$  ist  $1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$ ,

für  $x = 3$  ist  $3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$ .

In beiden Fällen ist die linke Seite der Gleichung (5) gleich null, demnach besitzt (5) die beiden Wurzeln

$$x_1 = 1 \quad ; \quad x_2 = 3$$

Lösen wir nun die Gleichung

$$x^2 + 6x - 7 = 0 \tag{7}$$

In diesem Falle sind die beiden ersten Glieder der linken Seite der Gleichung (7) gleich den ersten beiden Gliedern der Auflösung des Quadrats

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9 \tag{8}$$

der dritte Ausdruck in (7) ist -7, der dritte Ausdruck der rechten Seite der Gleichung (8) ist aber +9. Um demnach +9 zu erhalten, müssen wir zu -7 noch +16 addieren, denn es gilt  $-7 + 16 = 9$ .

Fügen wir also auf beiden Seiten der Gleichung (7) jeweils 16 hinzu, so erhalten wir nacheinander

$$x^2 + 6x - 7 + 16 = 16 \quad , \quad x^2 + 6x + 9 = 16$$

Beachten wir (8), so nimmt unsere Gleichung die Gestalt

$$(x + 3)^2 = 16$$

an. Da nun  $(-4)^2 = (+4)^2 = 16$  ist, wird

$$x + 3 = -4 \quad \text{oder} \quad x + 3 = 4$$

und wir erhalten daraus die beiden Wurzeln der Gleichung (7)

$$x_1 = -7 \quad ; \quad x_2 = 1$$

In den beiden hier betrachteten Beispielen war der Koeffizient des zweiten Gliedes immer eine gerade Zahl (in der ersten Gleichung -4, in der zweiten +6).

Versuchen wir nun, eine Gleichung zu lösen, bei der der Koeffizient des linearen Gliedes ungerade ist. Betrachten wir z.B. die Gleichung

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \tag{9}$$

Der Koeffizient ist  $3 = 2 \cdot \frac{3}{2}$ , die beiden ersten Ausdrücke in (9) sind demnach gleich den beiden ersten Ausdrücken der Auflösung

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 + 3x + \frac{9}{4} \quad (10)$$

Das absolute Glied der Gleichung (9) ist -10, um aber  $\frac{9}{4}$  zu erhalten, muss man zu -10 zunächst +10 hinzufügen und dann noch  $\frac{9}{4}$  addieren.

Man hat demnach auf beiden Seiten der Gleichung (9)  $10 + \frac{9}{4}$  zu addieren und erhält dann

$$x^2 + 3x - 10 + 10 + \frac{9}{4} = 10 + \frac{9}{4} \quad \text{oder} \quad x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \frac{49}{4} \quad (11)$$

Zur gleichen Form hätte man auch auf einem etwas anderen Wege gelangen können. Addieren wir 10 in Gleichung (9), so erhalten wir  $x^2 + 3x = 10$ ; addieren wir anschließend auf beiden Seiten  $\frac{9}{4}$ , so erhalten wir ebenfalls die Gleichung (11).

Die linke Seite von (11) ersetzen wir entsprechend (10) durch  $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ ; die Gleichung (11) erhält dann die Gestalt

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

Daraus ergeben sich die beiden Möglichkeiten

$$x + \frac{3}{2} = -\frac{7}{2} \quad \text{oder} \quad x + \frac{3}{2} = +\frac{7}{2}$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichung folgt, dass

$$x = -\frac{7}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{oder} \quad x_1 = -5$$

ist, und aus der zweiten folgt

$$x = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{oder} \quad x_2 = 2$$

Diese beiden gefundenen Werte sind Wurzeln der Gleichung  $x^2 + 3x - 10 = 0$ , wovon man sich leicht überzeugen kann, indem man diese Werte für  $x$  in die Gleichung einsetzt.

Wir lösen noch

$$x^2 - 8x + 24 = 0 \quad (12)$$

Formen wir diese Gleichung wie oben beschrieben um, so erhalten wir die Gleichung  $(x - 4)^2 = -8$ , die nicht lösbar ist, denn das Quadrat einer reellen Zahl kann nicht negativ sein. Demnach besitzt (12) keine reellen Wurzeln.

Unter den Gleichungen zweiten Grades, die wir gelöst haben, traten folgende Typen auf:

- 1) Gleichungen, die eine Doppelwurzel besitzen.
- 2) Gleichungen, die zwei verschiedene Wurzeln besitzen.

3) Gleichungen, die keine reellen Wurzeln besitzen.

In unseren weiteren Betrachtungen werden wir zeigen, dass das schon alle möglichen Typen quadratischer Gleichungen sind.

An Hand der durchgerechneten Beispiele haben wir den Weg gezeigt, der bei der Lösung quadratischer Gleichungen eingeschlagen werden muss. Alle Beispiele hatten jedoch Zahlen als Koeffizienten.

In der Mathematik bemüht man sich aber um Verallgemeinerungen, um allgemeine Regeln, die in einer möglichst großen Anzahl von Fällen gültig sind, und um die Darstellung der Ergebnisse in der Form von allgemeinen Sätzen oder Formeln. Zu diesem Zwecke werden in der Mathematik Zahlen häufig mit Buchstaben  $a, b, c, x, y, z$ , usw. bezeichnet.

Statt in jedem einzelnen Beispiel alle Umformungen vom Anfang bis zum Ende durchzuführen, führen wir sie nur einmal mit Buchstaben durch, für die wir erst im Endergebnis entsprechende Zahlenwerte einsetzen. Auch im Falle der quadratischen Gleichungen werden wir die uns bisher bekannten Umformungen nochmals in allgemeiner Form durchführen.

Wir betrachten hierzu die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad (13)$$

wobei  $a, b, c$  beliebige reelle Zahlen bezeichnen mit Ausnahme von  $a = 0$ , denn in diesem Falle würden wir die Gleichung  $bx + c = 0$  erhalten, die ersten Grades ist.

Unser Ziel ist es auch in diesem allgemeinen Fall, auf der linken Seite schließlich das Quadrat einer Summe zweier Summanden zu erhalten. Um nicht mit Brüchen umgehen zu müssen, können wir beide Seiten der Gleichung mit  $4a$  multiplizieren und erhalten dann die äquivalente Gleichung

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \quad \text{oder} \quad (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b = -4ac$$

Addieren wir jetzt auf beiden Seiten  $b^2$ , so folgt auf der linken Seite  $(2ax)^2 + 2(2ax)(b) + (b)^2$ , d.h. die Auflösung des Quadrats  $(2ax + b)^2$ . Auf der rechten Seite erhalten wir  $b^2 - 4ac$ . Auf diesem Wege gelangen wir zu der Gleichung

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \quad (14)$$

Die linke Seite ist als Quadrat nicht negativ, also muss auch die rechte Seite größer oder gleich null sein, wenn eine Lösung existieren soll.

Das Vorzeichen des Ausdrucks  $(b^2 - 4ac)$  unterscheidet (diskriminiert) die Gleichungen mit zwei Lösungen ( $b^2 - 4ac > 0$ ) von den Gleichungen mit einer Doppellösung ( $b^2 - 4ac = 0$ ) und den Gleichungen, die gar keine Lösung haben ( $b^2 - 4ac < 0$ ); der Ausdruck  $b^2 - 4ac$  wird deshalb Diskriminante<sup>5</sup> der quadratischen Gleichung genannt.

Sie wird meistens mit dem großen griechischen Buchstaben  $\Delta$  bezeichnet.

---

<sup>5</sup>Oft wird  $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  Diskriminante der Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  genannt (Anm. d. Red.).

Untersuchen wir nun nacheinander die drei Fälle in Abhängigkeit vom Vorzeichen der Diskriminante.

1.  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

In diesem Falle ist die rechte Seite der Gleichung

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

positiv, und wir erhalten

$$2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{oder} \quad 2ax + b = +\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Wir addieren  $-b$  auf beiden Seiten und dividieren anschließend durch  $2a$ . Damit erhalten wir aus der ersten Gleichung

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

und aus der zweiten Gleichung

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Das Ergebnis können wir wie folgt formulieren:

Ist die Diskriminante ( $\Delta = b^2 - 4ac$ ) einer quadratischen Gleichung größer als null, dann hat die Gleichung (13) zwei unterschiedliche reelle Wurzeln, die durch die Formeln

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (15)$$

dargestellt werden.

Die Lösungsmenge der Gleichung (13) ist gleich  $\{x_1, x_2\}$ .

Beispiel 1. Wir wenden die abgeleitete Formel zur Lösung der Gleichung

$$3x^2 - 7x - 10 = 0$$

an. Hier ist  $a = 3$ ,  $b = -7$ ,  $c = -10$ . Wir berechnen

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3(-10) = 49 + 120 = 169 = 13^2 > 0$$

Bei der Anwendung der Formeln (15) denken wir daran, dass  $b = -7$  und demnach  $-b = +7$  ist. Wir erhalten somit

$$x_1 = \frac{7 - 13}{2 \cdot 3}, \quad \text{d.h. } x_1 = -1, \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{7 + 13}{2 \cdot 3}, \quad \text{d.h. } x_2 = \frac{10}{3}.$$

Beispiel 2. Es ist die Gleichung

$$4x^2 + 9x + 3 = 0$$

zu lösen. Wir berechnen  $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 4 - 3 = 33 > 0$ . Da 33 keine Quadratzahl ist, sind die Wurzeln irrationale Zahlen:

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{33}}{8} \quad ; \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{33}}{8}$$

Wir betrachten nun den zweiten Fall.

2.  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Die rechte Seite der Gleichung (14) ist null, und die Gleichung hat demnach die Gestalt

$$(2ax + b)^2 = 0$$

d.h., es muss auch  $2ax + b = 0$  sein, und wir erhalten

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Auch dieses Ergebnis formulieren wir als Regel:

Wenn die Diskriminante ( $\Delta = b^2 - 4ac$ ) einer quadratischen Gleichung gleich null ist, so besitzt die Gleichung eine (Doppel-)Wurzel

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

Die Lösungsmenge ist die einelementige Menge  $\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ .

Manchmal sagen wir auch, die Gleichung besitzt zwei gleiche Wurzeln. Man sieht leicht, dass man mit Hilfe der Gleichungen (15) zum gleichen Ergebnis kommt, wenn man die Bedingung  $b^2 - 4ac = 0$  berücksichtigt. Die Formeln für  $x_1$  und  $x_2$  ergeben das gleiche Ergebnis wie Formel (16), denn die Addition oder Subtraktion von null ( $\sqrt{b^2 - 4ac}$  ist ja gleich null) ändert den Wert  $-b$  des ersten Summanden im Zähler nicht.

Beispiel. Es ist die Gleichung  $16x^2 - 40x + 25 = 0$  zu lösen.

Wir berechnen zunächst die Diskriminante der Gleichung

$$\Delta = 40^2 - 4 \cdot 16 \cdot 25 = 1600 - 1600 = 0$$

wenden die Formel (16) an und erhalten

$$x_{1,2} = \frac{40}{2 \cdot 16} = \frac{5}{4}$$

Dieselbe Gleichung kann man auch ohne Benutzung der Formel (16) lösen. Ihre linke Seite lässt sich als Quadrat einer Differenz darstellen

$$(4x - 5)^2 = 0$$

daraus folgt  $4x - 5 = 0$  und damit  $x_{1,2} = \frac{5}{4}$  in Übereinstimmung mit dem bereits vorher erhaltenen Ergebnis.

Zum Schluss betrachten wir den letzten Fall.

3.  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Die linke Seite der Gleichung

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

ist (als Quadrat) stets größer oder gleich null; die rechte Seite ist kleiner als null, d.h., wir erhalten einen Widerspruch. Es gibt keine reelle Zahl  $x$ , die die gegebene Gleichung erfüllt.

Ist die Diskriminante ( $\Delta = b^2 - 4ac$ ) einer quadratischen Gleichung negativ, so hat die Gleichung keine reellen Lösungen. Wir sagen dann, die Lösungsmenge ist leer und bezeichnen sie mit dem Symbol  $\emptyset$ .

Soll beispielsweise die Gleichung  $3x^2 - 5x + 6 = 0$  gelöst werden, so berechnen wir zunächst ihre Diskriminante

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 25 - 72 = -47$$

Da sie negativ ist, hat die Gleichung keine reellen Lösungen.

Ist der Koeffizient  $b$  gerade, so kann man die Berechnung der Wurzeln mit Hilfe der Formeln (15) vereinfachen, wenn man beachtet, dass die Zahl  $\frac{b}{2}$  ganz ist. Da die Zahl 2 im Nenner auftritt, kann man (15) entsprechend umformen und erhält

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} \quad (17)$$

Dieses Ergebnis erhalten wir folgendermaßen:

Weil wir vorausgesetzt haben, dass der Koeffizient  $b$  gerade ist, ist die Zahl  $\frac{b}{2}$  ganz, und auch ihr Quadrat  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$  ist eine ganze Zahl. Wir können deshalb die Diskriminante  $\Delta$  durch Ausklammern des Faktors 4 umformen

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 \left( \frac{b^2}{4} - ac \right) = 4 \left[ \left( \frac{b}{2} \right)^2 - ac \right] = 4 \cdot \frac{\Delta}{4}$$

und daraus folgt

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac} = 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac} = 2\sqrt{\frac{\Delta}{4}}$$

Wenn wir jetzt in den Formeln (15)  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  durch die rechte Seite der obigen Gleichung ersetzen, so erhalten wir

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{2a}$$

und nach Division des Zählers und des Nenners durch 2 schließlich Formel (17).

Obwohl ihre äußere Form komplizierter erscheint als bei (15), gestattet sie im Falle eines geraden Koeffizienten  $b$  eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung.

Wir wenden die letzte Formel zur Lösung der Gleichung

$$3x^2 - 22x - 25 = 0$$

an, erhalten

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 11^2 - 3 \cdot (-25) = 196 = 14^2 > 0$$

nach Formel (17)

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm 14}{3}$$

und schließlich

$$x_1 = \frac{11 - 14}{3} = -1 \quad ; \quad x_2 = \frac{11 + 14}{3} = 8\frac{1}{3}$$

Um die Vereinfachung der Berechnung einschätzen zu können, sollte der Leser die Ermittlung der Wurzeln dieser Gleichung mit Hilfe der Formeln (15) selbst vornehmen.

Häufig begegnet man dem Fall, dass  $a = 1$  ist. Man schreibt dann die Gleichung in der Form

$$x^2 + px + q = 0 \tag{18}$$

Die Formeln für die Wurzeln dieser Gleichung kann man unmittelbar aus (17) erhalten, indem man  $a = 1$ ,  $b = p$ ,  $c = q$  setzt. Es ist dann

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{19}$$

So sind z.B. die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

nach Formel (19) darstellbar in der Form

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$$

Da nun  $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$  ist, erhält man

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

und damit  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 2$ .

Besonders einfach kann man die Wurzeln einer Gleichung der Gestalt (18) berechnen, wenn der Koeffizient  $p$  gerade ist. Für die Gleichung

$$x^2 - 10x - 24 = 0$$



sind die Wurzeln in der Form

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 + 24} = 5 \pm 7$$

darstellbar, und man erhält schließlich  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 12$ .

#### Übungen

Es sind die folgenden Gleichungen zu lösen!

4. a)  $x^2 - 14x + 49 = 0$ ,

b)  $3x^2 - 11x - 14 = 0$ ,

c)  $4x^2 - x + 2 = 0$ ,

d)  $6x^2 - 7x + 1 = 0$

e)  $3x^2 - 10x + 3 = 0$ ,

f)  $x^2 - 10x + 8 = 0$ .

5. a)  $x^2 - \sqrt{17}x + 2 = 0$ ,

b)  $64x^2 + 48x + 9 = 0$ ,

c)  $x^2 + 100x - 101 = 0$ .

6. a)  $x^2 + 2x - 3 = 0$ ,

b)  $0,001x^2 + 2x - 3 = 0$ ,

c)  $0,000001x^2 + 2x - 3 = 0$ .

7. Man vergleiche die Wurzeln der Gleichungen der Übung 6! Was können wir über die Wurzeln der Gleichung  $ax^2 + 2x - 3 = 0$  sagen, wenn der positive Koeffizient  $a$  immer kleiner wird und gegen null strebt?

## 4 Aufstellen der Gleichung bei gegebenen Wurzeln - Wurzelsatz von Vieta

Wir kehren das Problem jetzt um: es ist eine quadratische Gleichung zu finden, deren zwei Wurzeln vorgegebene Zahlen sind, z.B.  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 5$ .

Wir überlegen uns, dass  $x = 2$  die Lösung etwa folgender Gleichungen ist:

$$x - 2 = 0 \quad \text{oder} \quad 3(x - 2) = 0 \quad \text{oder} \quad 25(x - 2) = 0 \quad \text{usw.}$$

Analog ist die Zahl 5 die Wurzel jeder der Gleichungen

$$x - 5 = 0 \quad \text{oder} \quad 2(x - 5) = 0 \quad \text{oder} \quad -6(x - 5) = 0 \quad \text{usw.}$$

Aus diesen Beispielen können wir weiter schließen, dass die Zahlen 2 und 5 gleichzeitig Wurzeln der Gleichung

$$(x - 2)(x - 5) = 0 \tag{1}$$

sind, denn ein Produkt ist null, wenn wenigstens einer der Faktoren null ist. Aber auch Gleichungen der Form

$$3(x - 2)(x - 5) = 0 \quad \text{oder} \quad -10(x - 2)(x - 5) = 0$$

besitzen die gleichen Wurzeln.

Die allgemeine Form der Gleichungen mit den Wurzeln 2 und 5 ist

$$a(x - 2)(x - 5) = 0$$

wobei wir für  $a$  eine beliebige, von null verschiedene Zahl setzen können.

Nach dem Ausführen der Multiplikation  $(x - 2)(x - 5)$  geht die Gleichung (1) über in

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Wollen wir in ähnlicher Weise eine Gleichung mit anderen Wurzeln finden, z.B. -4, +7, so bilden wir die Differenzen  $x - (-4)$ , d.h.  $x + 4$ , und  $x - 7$ , und setzen ihr Produkt gleich null:

$$(x + 4)(x - 7) = 0$$

Gehen wir nun zu Buchstaben über, so stellen wir fest, dass die einfachste Gleichung mit den Wurzeln  $x = x_1$  und  $x = x_2$  die Form

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \tag{2}$$

hat, oder allgemeiner

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0, \quad a \neq 0 \tag{3}$$

Wir führen die Multiplikation auf der linken Seite der Gleichung (3) aus

$$ax^2 - ax_1x - ax_2x + ax_1x_2 = 0$$

und klammern aus den beiden mittleren Ausdrücken  $ax$  aus:

$$ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = 0 \quad (4)$$

Vergleichen wir nun diese Form der Gleichung mit der allgemeinen Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (5)$$

einer quadratischen Gleichung, von der wir vermuten, dass sie die gleichen Wurzeln  $x_1$  und  $x_2$  hat.

Die Gleichungen (4) und (5) haben also die gleichen Wurzeln, der Koeffizient des quadratischen Gliedes  $x^2$  ist in beiden gleich  $a$ , und auch die anderen entsprechenden Koeffizienten in beiden Gleichungen müssen gleich sein.

Vergleichen wir die Koeffizienten des Gliedes mit  $x$  in der ersten Potenz in den Gleichungen (4) und (5), so erhalten wir

$$-a(x_1 + x_2) = b \quad \text{und daraus} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (6)$$

Der Vergleich der absoluten Glieder ergibt

$$ax_1x_2 = c \quad \text{und wir erhalten} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (7)$$

Somit haben wir die Summe und das Produkt der Wurzeln in Abhängigkeit von den Koeffizienten der quadratischen Gleichung ausgedrückt.

Das Produkt der Wurzeln der quadratischen Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  ist gleich dem Quotienten aus dem absoluten Glied  $c$  und dem Koeffizienten  $a$  des quadratischen Gliedes.

Die Summe der Wurzeln der quadratischen Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  ist gleich dem negativen Quotienten aus dem Koeffizienten  $b$  des linearen Gliedes und dem Koeffizienten  $a$  des quadratischen Gliedes.

Wir kommen zu dem gleichen Ergebnis, wenn wir die Formeln für die Wurzeln der quadratischen Gleichung anwenden. Wir berechnen die Summe der Wurzeln und erhalten

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Berechnen wir jetzt das Produkt der Wurzeln, wobei wir die Regel  $(k-l)(k+l) = k^2 - l^2$  anwenden, so wird

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Ist der erste Koeffizient gleich 1, hat die Gleichung also die Gestalt

$$x^2 + px + q = 0$$

so vereinfachen sich die obigen Gleichungen. Es ist dann

$$x_1 + x_2 = -p \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = q \quad (8)$$

Das Produkt der Wurzeln der quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  ist gleich dem absoluten Glied  $q$ , ihre Summe ist gleich dem negativen Koeffizienten  $-p$  des linearen Gliedes.

Die Formeln für die Summe und das Produkt der Wurzeln der quadratischen Gleichung hat der französische Mathematiker Francois Vieta (lat. Vieta) abgeleitet, der systematisch Buchstaben in die Algebra eingeführt hat. Diese Formeln werden deshalb auch Wurzelsatz von Vieta genannt.

Wir beweisen noch die Gültigkeit des folgenden Satzes:

Wenn zwei Gleichungen zweiten Grades die gleichen Wurzeln besitzen (die nicht gleichzeitig null sind), so sind die entsprechenden Koeffizienten proportional.

Gegeben sind zwei Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad \text{und} \quad a'x^2 + b'x + c' = 0, \quad a' \neq 0$$

die die gleichen Wurzeln  $x_1$  und  $x_2$  besitzen sollen. Nach dem Vietaschen Wurzelsatz ergeben sich für die erste Gleichung die Beziehungen

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad , \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

und für die zweite Gleichung

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c'}{a'} \quad , \quad x_1 + x_2 = -\frac{b'}{a'}$$

Daraus folgt sofort

$$\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \quad ; \quad -\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'}$$

Da  $a \neq 0 \neq a'$  ist, schließen wir aus  $c \neq 0$  auf  $c' \neq 0$ , und wenn  $c = 0$  ist, dann muss auch  $c' = 0$  sein. Gleiches gilt auch für die Koeffizienten  $b$  und  $b'$ .

Nehmen wir zunächst an, alle Koeffizienten seien von Null verschieden. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt dann

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}; \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}; \quad \text{also} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

in Übereinstimmung mit dem angegebenen Satz. Wenn jedoch  $b = 0 = b'$  und  $c$  sowie  $c'$  ungleich null sind, so gilt

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$

Die Gleichungen haben dann die Form  $ax^2 + c = 0$  und  $a'x^2 + c' = 0$  mit ebenfalls proportionalen Koeffizienten.

Analog kann die Gültigkeit des Satzes für den Fall, dass  $c = 0 = c'$  ist, die Koeffizienten  $b$  und  $b'$  aber ungleich null sind, bewiesen werden.

Sind dagegen beide Koeffizientenpaare ( $b$  und  $b'$ ,  $c$  und  $c'$ ) gleich null, so haben die Gleichungen die Gestalt  $ax^2 = 0$ ,  $a'x^2 = 0$ , und man kann nicht mehr von einer Proportionalität zweier Zahlen sprechen, denn eine Proportion umfasst mindestens zwei Zahlenpaare. Die beiden Wurzeln der beiden Gleichungen sind dann null. Es gilt auch die Umkehrung des Satzes:

Falls die entsprechenden Koeffizienten zweier quadratischer Gleichungen proportional sind, so haben die Gleichungen die gleichen Wurzeln.

Die Gleichungen

$$\begin{array}{lcl} x^2 - 0,5x - 0,25 = 0 & , & 2x^2 - x - 0,5 = 0 \\ 4x^2 - 2x - 1 = 0 & , & 12x^2 - 6x - 3 = 0 \end{array}$$

und allgemein alle Gleichungen der Form  $ax^2 - 0,5ax - 0,25a = 0$  (mit  $a \neq 0$ ) haben die gleichen Wurzeln.

Wir wenden den Vietaschen Wurzelsatz noch zur Lösung einer charakteristischen Aufgabe an.

Aufgabe. Ohne die Gleichung

$$4x^2 - 7x - 11 = 0$$

zu lösen, ist eine neue Gleichung zu ermitteln, deren Wurzeln den Kehrwerten der Wurzeln der angegebenen Gleichung gleich sind.

Wir bezeichnen die Wurzeln der gegebenen Gleichung mit  $x_1$  und  $x_2$  und die Wurzeln der gesuchten Gleichung mit  $x'_1$  und  $x'_2$ . Entsprechend der Aufgabenstellung sollen die Bedingungen

$$x'_1 = \frac{1}{x_1} \quad ; \quad x'_2 = \frac{1}{x_2} \quad (9)$$

erfüllt sein. Mit Hilfe des Vietaschen Wurzelsatzes berechnen wir die Summe und das Produkt der Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x_1 + x_2 = \frac{7}{4} \quad ; \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{11}{4} \quad (10)$$

und versuchen mit Hilfe der Beziehungen (9) die Summe und das Produkt der Wurzeln  $x_1$  und  $x_2$  der gesuchten Gleichung in Abhängigkeit von den Wurzeln  $x_1$  und  $x_2$  der gegebenen Gleichung darzustellen:

$$x'_1 + x'_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$$

Der Zähler und auch der Nenner des letzten Bruches sind aber schon berechnet in den Gleichungen (10), und wir erhalten damit

$$x'_1 + x'_2 = \frac{7}{4} : \left(-\frac{11}{4}\right) = -\frac{7 \cdot 4}{4 \cdot 11} = -\frac{7}{11}$$

Nun betrachten wir das Produkt der Wurzeln  $x'_1$  und  $x'_2$

$$x'_1 x'_2 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} = 1 : \left(-\frac{11}{4}\right) = -\frac{4}{11}$$

Auf diesem Wege haben wir die Summe und das Produkt der Wurzeln der gesuchten Gleichung berechnet:

$$x'_1 + x'_2 = -\frac{7}{11} \quad ; \quad x'_1 x'_2 = -\frac{4}{11}$$

Wir wenden jetzt den Vietaschen Wurzelsatz an. Soll die gesuchte Gleichung die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

haben, so muss entsprechend (8)

$$-p = -\frac{7}{11} \quad ; \quad q = -\frac{4}{11}$$

gelten. Die gesuchte Gleichung lautet demnach

$$x^2 + \frac{7}{11}x - \frac{4}{11} = 0$$

oder nach Multiplikation mit 11

$$11x^2 + 7x - 4 = 0$$

Die entsprechenden Koeffizienten der beiden letzten Gleichungen sind proportional; nach dem angegebenen Satz haben die beiden Gleichungen gleiche Wurzeln.

Wir überprüfen unsere gefundenen Lösungen und lösen die Ausgangsgleichung

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 176}}{8} = \frac{7 \pm 15}{8} \quad \text{d.h.} \quad x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{11}{4}$$

Die zweite Gleichung hat die Wurzeln

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 176}}{22} = \frac{-7 \pm 15}{22} \quad \text{d.h.} \quad x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{4}{11}$$

Wir sehen, dass die Wurzeln der zweiten Gleichung tatsächlich gleich den Kehrwerten der Wurzeln der Ausgangsgleichungen sind, denn der Kehrwert von -1 ist -1 und der Kehrwert von  $\frac{11}{4}$  ist  $\frac{4}{11}$ .

Wir wollen jetzt einige weitere Schlüsse aus dem Wurzelsatz von Vieta

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad ; \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

ableiten. Dazu betrachten wir wieder die Diskriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Ist das Produkt  $ac < 0$ , dann ist  $-4ac > 0$  und damit auch  $b^2 - 4ac > 0$ . Wir sehen also:

Wenn die Koeffizienten  $a$  und  $c$  (d.h. der Koeffizient des quadratischen Gliedes und das Absolutglied) ungleiche Vorzeichen haben, dann hat die quadratische Gleichung sicher zwei verschiedene Wurzeln, die wegen  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$  sogar verschiedene Vorzeichen haben.

So hat z.B. die Gleichung  $2x^2 - 7x - 5 = 0$  sicher zwei Wurzeln mit unterschiedlichen Vorzeichen. Die gleiche Eigenschaft hat die Gleichung  $-x^2 + x + 10 = 0$ .

Haben dagegen die Koeffizienten  $a$  und  $c$  gleiche Vorzeichen, so ist  $ac > 0$ , und die Diskriminante  $b^2 - 4ac$  der Gleichung kann negativ, positiv oder auch null sein. Es können jetzt keine allgemeinen Schlüsse gezogen werden, und wir müssen die Diskriminante berechnen um zu wissen, mit welchem Fall wir es zu tun haben.

Nehmen wir nun an, die Diskriminante ist  $\Delta > 0$  und das Produkt der Wurzeln ist negativ ( $x_1 \cdot x_2 < 0$ ), so kann man daraus sofort den Schluss ziehen, dass die Wurzeln verschiedene Vorzeichen besitzen. Wenn wir verabreden, mit  $x_1$  stets die kleinere Wurzel zu bezeichnen, dann gilt also  $x_1 < 0$  und  $x_2 > 0$ .

Ist dabei die Summe der Wurzeln positiv, d.h.  $x_1 + x_2 > 0$ , so ist der absolute Betrag der positiven Wurzel größer als der der negativen Wurzel. Ist dagegen ihre Summe negativ, so hat die negative Wurzel den größeren absoluten Betrag.

Wenn schließlich  $\Delta > 0$  und das Produkt  $x_1 x_2$  der Wurzeln positiv ist ( $x_1 x_2 > 0$ ), dann sind die Vorzeichen der beiden Wurzeln gleich. Ist also die Summe der Wurzeln  $x_1 + x_2$  positiv ( $x_1 + x_2 > 0$ ), so sind beide Wurzeln positiv; ist die Summe negativ ( $x_1 + x_2 < 0$ ), so sind auch beide Wurzeln negativ.

Die Gleichung  $x^2 - 5x + 6 = 0$  besitzt z.B. zwei positive Wurzeln, denn  $\Delta = 25 - 24 > 0$ ,  $x_1 - x_2 = 6 > 0$ ,  $x_1 + x_2 = 5 > 0$ .

Wir untersuchen noch die Vorzeichen der Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

ohne sie zu lösen. Da die Koeffizienten  $a$  und  $c$  unterschiedliche Vorzeichen haben, ist  $\Delta > 0$  und  $x_1 - x_2 = -14 < 0$ ; die Wurzeln haben also unterschiedliche Vorzeichen. Wir betrachten nun die Summe der Wurzeln  $x_1 + x_2 = 5 > 0$ . Daraus schließen wir, dass  $|x_2| > |x_1|$  ist. (Das Symbol  $|x|$  bezeichnet den absoluten Betrag der Zahl  $x$ .)

Wir setzen voraus, dass die Vorzeichen der Summe und des Produktes der Wurzeln bekannt sind und wollen unter der Annahme, dass die Diskriminante  $\Delta > 0$  ist, alle möglichen Fälle nochmals zusammenstellen.

Wird  $x_1 < x_2$  vorausgesetzt, so gibt es folgende Möglichkeiten:

1. Ist  $x_1 \cdot x_2 > 0$  und  $x_1 + x_2 > 0$ , so ist  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ,
2. Ist  $x_1 \cdot x_2 > 0$  und  $x_1 + x_2 < 0$ , so ist  $x_1 < 0$ ,  $x_2 > 0$ ,
3. Ist  $x_1 \cdot x_2 < 0$  und  $x_1 + x_2 > 0$ , so ist  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ , wobei  $|x_1| < |x_2|$
4. Ist  $x_1 \cdot x_2 < 0$  und  $x_1 + x_2 < 0$ , so ist  $x_1 < 0$ ,  $x_2 > 0$ , wobei  $|x_1| = |x_2|$
5. Ist  $x_1 \cdot x_2 < 0$  und  $x_1 + x_2 < 0$ , so ist  $x_1 < 0$ ,  $x_2 > 0$ , wobei  $|x_1| > |x_2|$
6. Ist  $x_1 \cdot x_2 = 0$  und  $x_1 + x_2 > 0$ , so ist  $x_1 = 0$ ,  $x_2 > 0$
7. Ist  $x_1 \cdot x_2 = 0$  und  $x_1 + x_2 < 0$ , so ist  $x_1 < 0$ ,  $x_2 = 0$

## Übungen

8. Es sind Gleichungen mit den Wurzeln a) 3 und 7, b) -6 und 2, c) -10 und -1 zu bestimmen!
9. Es sind Gleichungen mit den Wurzeln a)  $\frac{3}{4}$  und  $-\frac{2}{3}$ , b)  $2 - \sqrt{3}$  und  $2 + \sqrt{3}$ , c)  $\frac{1}{2}(-3 - \sqrt{5})$  und  $\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5})$  zu bestimmen!
10. Gegeben sei die Gleichung  $x^2 + 4x - 12 = 0$ . Ohne diese zu lösen, ist die quadratische Gleichung zu bestimmen, deren Wurzeln doppelt so groß sind wie die Wurzeln der angegebenen Gleichung!
11. Gegeben sei die Gleichung  $x^2 + 6x - 27 = 0$ . Ohne diese zu lösen, ist die quadratische Gleichung zu bestimmen, deren Wurzeln 3 mal kleiner sind als die Wurzeln der gegebenen Gleichung!
12. In Anlehnung an das im Text behandelte Beispiel ist zu beweisen, dass die Wurzeln der Gleichung  $cx^2 + bx + a = 0$  gleich den Kehrwerten der Wurzeln der Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $\Delta \geq 0$ ,  $a \neq 0 \neq c$ ) sind!
13. Ohne die folgenden Gleichungen zu lösen ist zu entscheiden, welche von ihnen Wurzeln besitzen und welche Vorzeichen dieselben haben!
- a)  $x^2 - 7x - 11 = 0$ ,
  - b)  $x^2 - 12x + 35 = 0$ ,
  - c)  $x^2 + x + 1 = 0$ ,
  - d)  $x^2 + 4x + 1 = 0$ ,
  - e)  $100x^2 - 60x + 9 = 0$ .



## 5 Wir lösen quadratische Gleichungen im Kopf

Betrachten wir eine Gleichung mit positiver Diskriminante

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Das Produkt der Wurzeln dieser Gleichung ist 12, ihre Summe ist 7. Wir versuchen zu entscheiden, ob sie ganzzahlige Wurzeln besitzt, indem wir die Wurzeln im Kopf ermitteln.

Das Produkt 12 kann entstanden sein durch die Multiplikation der Zahlen 2 und 6, ihre Summe wäre dann allerdings  $2 + 6 = 8$  und nicht 7; die Zahlen 2 und 6 sind also keine Wurzeln.

Versuchen wir es nochmals: 12 ist auch das Produkt der Zahlen 3 und 4, deren Summe in der Tat 7 ist. Die Wurzeln der Gleichung sind also 3 und 4:  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = 4$ .

Für die Gleichung

$$x^2 + 19x + 18 = 0$$

ist  $\Delta = 19^2 - 4 \cdot 18 > 0$  und das Produkt der Wurzeln  $x_1 \cdot x_2 = 18$ ; die Summe beträgt  $x_1 + x_2 = -19$ .

Da das Produkt positiv ist, haben beide Wurzeln das gleiche Vorzeichen; weil ihre Summe negativ ist, sind also auch beide Wurzeln negativ.

Folgende Zerlegungen der Zahl 18 in ein Produkt zweier negativer ganzer Zahlen sind möglich:

$18 = (-9) \cdot (-2)$ , dann ist die Summe  $-9 + (-2) = -11 \neq -19$ ,

$18 = (-6) \cdot (-3)$ , dann ist die Summe  $-6 + (-3) = -9 \neq -19$ ,

$18 = (-1) \cdot (-18)$ , dann ist die Summe  $-1 + (-18) = -19$ .

Die Zahlen  $x_1 = -18$ ,  $x_2 = -1$  sind also die Wurzeln der Gleichung.

Jetzt versuchen wir, die Gleichung

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

im Kopf zu lösen. Hier ist die Diskriminante auch positiv, das Produkt der Wurzeln aber negativ  $x_1 \cdot x_2 = -16$ . Die Wurzeln haben also unterschiedliche Vorzeichen. Da die Summe  $x_1 + x_2 = -6$  negativ ist, ist der absolute Betrag der negativen Wurzel größer als der Betrag der positiven Wurzel. Es gibt hier folgende Möglichkeiten:

$-16 = -16 \cdot 1$ , dann ist die Summe  $-16 + 1 = -15 \neq -6$ ,

$-16 = -8 \cdot 2$ , dann ist die Summe  $-8 + 2 = -6$ .

Die Wurzeln der Gleichung lauten demnach  $x_1 = -8$ ;  $x_2 = 2$ .

Natürlich wird es nur für wenige Gleichungen möglich sein, bei bekannter Summe und bekanntem Produkt der Wurzeln diese im Kopf zu ermitteln.

So ist es z.B. schwierig, die Wurzeln  $x_1 = -3,75$  und  $x_2 = 1,5$  der Gleichung

$$8x^2 + 18x - 45 = 0$$

im Kopf zu bestimmen.

### Übungen

Mit Hilfe der Formeln für die Summe und das Produkt der Wurzeln sind folgende Gleichungen im Kopf zu lösen!

14. a)  $x^2 - 5x + 6 = 0$ ,

b)  $x^2 + 9x + 20 = 0$ ,

c)  $x^2 - 15x + 14 = 0$ ,

d)  $x^2 - x - 12 = 0$ ,

e)  $x^2 + 3x - 10 = 0$ ,

f)  $x^2 - 13x - 14 = 0$ .

15. a)  $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ ,

b)  $x^2 - (2p - 3q)x - 6pq = 0$ ,

c)  $x^2 + (4k - m)x - 4km = 0$ .

## 6 Wir lösen Aufgaben mit einer Unbekannten

Mit Hilfe quadratischer Gleichungen kann man viele Aufgaben aus verschiedenen Bereichen der Mathematik, der Physik, des Handels usw. lösen, aber auch viele unterhaltsame Aufgaben.

Aufgabe 1: Als Beispiel lösen wir eine aus dem 12. Jahrhundert stammende indische Aufgabe:

Einst spielten Affen - berichtet aus Indien die Kunde -  
Ihr achter Teil im Quadrat springt schon im Walde.  
Die übrigen zwölf tanzen lärmend  
zwischen grünen Hügeln.  
Wieviel waren es zusammen, fragt Bhaskara.  
Die Aufgabe ist nicht schwer, obzwar schon sehr alt.

Wir bezeichnen die, unbekannte Anzahl der Affen mit  $x$ . Ihr achter Teil im Quadrat, d.h.  $\left(\frac{x}{8}\right)^2$ , springt im Walde. Der verbleibende Rest, d.h.  $x - \left(\frac{x}{8}\right)^2$ , stellt die "übrigen zwölf" dar.

Wir erhalten also die Gleichung

$$x - \left(\frac{x}{8}\right)^2 = 12$$

Zunächst quadrieren wir

$$x - \frac{x^2}{64} = 12$$

multiplizieren beide Seiten mit 64

$$64x - x^2 = 768$$

ordnen die Ausdrücke und erhalten die quadratische Gleichung

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

Da der Koeffizient des quadratischen Glieds 1 ist, wenden wir die Formel (19) an

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{64}{2}\right)^2 - 768 = 1024 - 768 = 256 \quad , \quad \sqrt{\frac{\Delta}{4}} = 16$$

und erhalten

$$x_1 = 32 - 16 = 16 \quad ; \quad x_2 = 32 + 16 = 48$$

Wir haben also zwei Antworten erhalten: die Anzahl der Affen kann 16 oder 48 sein. Es lässt sich leicht überprüfen, dass beide Zahlen den Bedingungen der ursprünglichen Aufgabe genügen:

1. Ist  $x = 16$  und damit  $\frac{x}{8} = 2$ , so ist  $\left(\frac{x}{8}\right)^2 = 4$  und  $16 - 4 = 12$ .
2. Ist  $x = 48$  und damit  $\frac{x}{8} = 6$ , so ist  $\left(\frac{x}{8}\right)^2 = 36$  und  $48 - 36 = 12$ .

Aufgabe 2. Ein Buch enthält 20000 Zeilen. Jede Seite hat die gleiche Anzahl von Zeilen. Würde das Buch in einem Format gedruckt werden, das jeweils 10 Zeilen mehr auf einer Seite hat (bei gleicher Zeilenlänge), dann würde sich die Seitenzahl um 100 vermindern. Wieviele Zeilen sind auf jeder Seite, und wieviele Seiten hat das Buch?

Wir bezeichnen mit  $x$  die Anzahl der Zeilen pro Seite. Da das Buch 20000 Zeilen enthält, hat es so viele Seiten, wieviele Male  $x$  in 20000 enthalten ist, d.h.  $\frac{20000}{x}$  Seiten. (1)

Beim neuen Format wäre die Anzahl der Zeilen um 10 größer, sie wäre also  $(x + 10)$  Zeilen, und das Buch hätte so viele Seiten, wieviele Male  $(x + 10)$  in 20000 enthalten ist, d.h.  $\frac{20000}{x+10}$  Seiten. (2)

Die Anzahl der Seiten (2) bei verändertem Format ist um 100 kleiner als die Anzahl der Seiten (1). Man muss also von der größeren Zahl (1) 100 abziehen, damit die Differenz gleich der kleineren Zahl (2) wird

$$\frac{20000}{x} - 100 = \frac{20000}{x + 10} \quad (3)$$

Nun muss die Gleichung (3) gelöst werden, wobei natürlich  $x \neq 0$ ,  $x + 10 \neq 0$  vorausgesetzt sind.

Zunächst dividieren wir beide Seiten der Gleichung durch 100 und erhalten

$$\frac{200}{x} - 1 = \frac{200}{x + 10} \quad (3)$$

dann bringen wir beide Seiten auf den Hauptnenner, der gleich dem Produkt der Nenner  $x(x + 10)$  ist

$$\frac{200(x + 10) - x(x + 10)}{x(x + 10)} = \frac{200x}{x(x + 10)}$$

Sind zwei gleichnamige Brüche gleich, so sind auch ihre Zähler gleich, und es ist

$$200(x + 10) - x(x + 10) = 200x$$

Wir führen jetzt die Multiplikationen durch, bekommen

$$200x + 2000 - x^2 - 10x = 200x$$

fassen zusammen und ordnen

$$x^2 + 10x - 2000 = 0$$

Jetzt berechnen wir  $\Delta = 5^2 + 2000 = 2025 = 45^2$ , wenden die Formel (19) an  $x_{1,2} = -5 \pm 45$  und erhalten schließlich  $x_1 = -50$ ;  $x_2 = 40$ .

Beide Werte sind Wurzeln der Gleichung (3), aber nur  $x = 40$  ist auch Lösung unserer Aufgabe, denn die Anzahl der Zeilen auf einer Seite kann natürlich nicht -50 sein! Jede Seite des Buches enthält also 40 Zeilen.

Vervollständigen wir noch unser Ergebnis. Wenn das Buch 20000 Zeilen enthält und jede Seite 40 Zeilen hat, so besteht das Buch aus  $20000 : 40 = 500$  Seiten. Bei verändertem Format wären auf jeder Seite 10 Zeilen mehr, d.h. 50 Zeilen, und das Buch hätte  $20000 : 50 = 400$  Seiten. Die Anzahl der Seiten hätte sich demnach um 100 vermindert ( $500 - 100 = 400$ );

Aufgabe 3. Auf einem rechteckigen Platz steht ein Haus mit der Grundfläche  $30 \text{ m} \cdot 25 \text{ m}$ . Die Lage des Hauses auf dem Platz ist so gewählt, dass auf jeder Seite des Hauses ein Streifen gleicher Breite entsteht (Abb. 1), wobei das Haus  $\frac{1}{3}$  der Fläche des gesamten Platzes einnimmt. Wie breit sind die Streifen?

Das Haus nimmt  $30 \text{ m} \cdot 25 \text{ m} = 750 \text{ m}^2$  ein, die gesamte Fläche des Platzes beträgt demnach  $3 \cdot 750 \text{ m}^2 = 2250 \text{ m}^2$ .

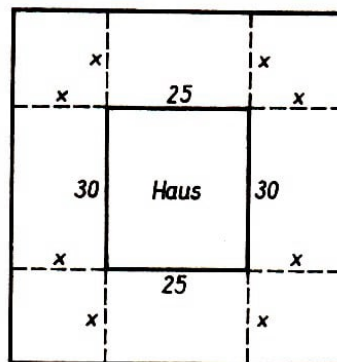


Abb. 1

Wir bezeichnen die Breite der Streifen mit  $x$ . Die Gesamtfläche der Streifen um das Haus kann entsprechend Abb. 1 in 8 Teile zerlegt werden: vier Quadrate an den Ecken des Platzes und vier paarweise gleiche Rechtecke an den Seiten des Hauses.

Die Seitenlänge der Quadrate beträgt  $x$ , die Fläche der 4 Eckteile ist demnach gleich  $4x^2 \text{ m}^2$ . Die Seiten der Rechtecke, die zur Breite des Hauses gehören (auf der Zeichnung unten und oben), sind  $25 \text{ m}$  und  $x \text{ m}$ , die Fläche dieser Rechtecke beträgt demnach  $2 \cdot 25 \cdot x \text{ m}^2$ .

Ähnlich erhält man die Fläche der Rechtecke, die zur Länge des Hauses gehören (auf der Zeichnung an der linken und rechten Seite). Sie beträgt  $2 \cdot 30 \cdot x \text{ m}^2$ . Die Streifen haben also insgesamt die Fläche (in  $\text{m}^2$ )

$$4x^2 + 2 \cdot 25 \cdot x + 2 \cdot 30 \cdot x$$

Addieren wir hierzu noch die Fläche des Hauses, d.h.  $750 \text{ m}^2$ , so erhalten wir die Fläche des gesamten Platzes von  $2250 \text{ m}^2$ . Daraus folgt die Gleichung

$$4x^2 + 50x + 60x + 750 = 2250 \quad (4)$$

Wir fassen zusammen

$$4x^2 + 110x - 1500 = 0$$

und teilen durch zwei

$$2x^2 + 55x - 750 = 0$$

Es ist hier  $\Delta = 55^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-750) = 9025 = 95^2$ , und wir erhalten

$$x_1 = \frac{-55 - 95}{4} = -\frac{75}{2}, \quad x_2 = \frac{-55 + 95}{4} = 10$$

Beide Werte für  $x$  sind Lösungen der Gleichung (4), aber nur der Wert  $x = 10$  ist Lösung unserer Aufgabe. Die Breite der Streifen um das Haus beträgt 10 m.

Aufgabe 4. Ein qualifizierter Arbeiter würde für eine bestimmte Arbeit 15 Tage weniger benötigen als ein nichtqualifizierter Arbeiter. Um diese Arbeit in einer möglichst kurzen Zeit auszuführen, wurde sie beiden Arbeitern zusammen übertragen, die sie in 10 Tagen bewältigten.

In welcher Zeit hätte jeder Arbeiter allein die Arbeit ausgeführt?

Wir bezeichnen mit  $x$  die Anzahl der Tage, die der qualifizierte Arbeiter zur Ausführung der Arbeit benötigt; der nichtqualifizierte Arbeiter allein würde dann 15 Tage länger brauchen, d.h.  $(x + 15)$  Tage.

Es ist offensichtlich, dass die Zeit zur Bewältigung der Arbeit durch beide Arbeiter kleiner ist als  $x$ , und man braucht wohl nicht zu begründen, dass Schlussfolgerungen wie z.B. "da sie beide zusammen arbeiten, muss man ihre Arbeitszeiten addieren" oder auch "die Zeit zur Bewältigung der Arbeit durch beide Arbeiter zusammen ist gleich dem arithmetischen Mittel der für beide einzeln notwendigen Arbeitszeiten" Unsinn sind.

Hier muss man ganz andere Überlegungen anstellen als bei den bisherigen Aufgaben.

Wenn der qualifizierte Arbeiter die Arbeit in  $x$  Tagen bewältigt, erfüllt er an einem Tage  $\frac{1}{x}$  der Arbeit.

Analog führt der nichtqualifizierte Arbeiter an einem Tage  $\frac{1}{x+15}$  der Arbeit aus. An einem Tage schaffen sie also folgenden Teil der Arbeit

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} \tag{5}$$

Zusammen bewältigen sie die Arbeit in 10 Tagen, d.h. an einem Tage  $\frac{1}{10}$  der Arbeit. (6)

Die Ausdrücke (5) und (6) sind gleich, wir erhalten also die Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{10} \tag{7}$$

Um sie zu lösen, bringen wir beide Seiten der Gleichung auf den Hauptnenner  $10x(x+15)$

$$\frac{10(x+15) + 10x}{10x(x+15)} = \frac{x(x+15)}{10x(x+15)}$$

und erhalten durch Vergleich der Zähler

$$10x + 150 + 10x = x^2 + 15x$$

Nun fassen wir zusammen und ordnen

$$x^2 - 5x - 150 = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind  $x_1 = -10$ ;  $x_2 = 15$ , und da keiner der Nenner von (7) für diese Werte null wird, sind dies gleichzeitig die Wurzeln der Gleichung (7). Lösung unserer Aufgabe ist natürlich nur die Wurzel  $x_2 = 15$ .

Ein qualifizierter Arbeiter würde also die Arbeit allein in 15 Tagen ausführen, während ein nichtqualifizierter Arbeiter dafür  $15 + 15 = 30$  Tage benötigen würde.

Aufgabe 5. Eine Einheit Soldaten wurde in einem Karree mit gleichen Seiten in Dreierreihen aufgestellt (Abb. 2).

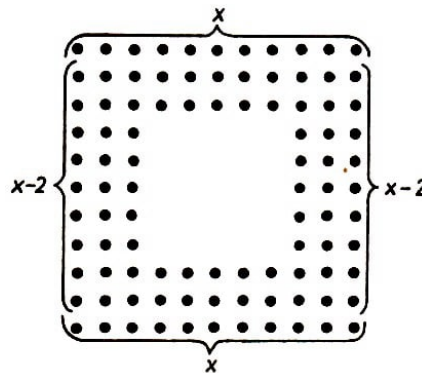


Abb. 2

Wenn man die gleiche Einheit so in einem quadratischen Block aufstellt, dass in einer Reihe jeweils  $\frac{9}{10}$  der Anzahl der Soldaten einer Seite des äußeren Quadrats der ersten Aufstellung stehen, so bleiben 3 Soldaten übrig.

Wieviele Soldaten sind in dieser Einheit?

Wir nennen die Anzahl der Soldaten auf einer Seite des äußeren Quadrats der ersten Aufstellung  $x$ . Da ein Quadrat vier gleiche Seiten hat, sind wir geneigt anzunehmen, dass sich auf den Seiten des äußeren Quadrats  $4x$  Soldaten befinden. Das stimmt aber nicht! -

Dieser Schluss ist falsch, wovon wir uns mit Hilfe der Abbildung überzeugen können:

Wenn auf der "unteren" und auf der "oberen" Seite jeweils  $x$  Soldaten stehen, so enthalten die "rechte" und "linke" Seite nicht mehr  $x$ , sondern nur noch  $(x - 2)$  Soldaten, denn die an den Ecken stehenden Soldaten sind schon bei den anderen Seiten mitgezählt worden. Auf den Seiten des äußeren Quadrats stehen also

$$2x + 2(x - 2) = 2x + 2x - 4 = 4x - 4$$

und nicht  $4x$  Soldaten.

Um die Anzahl der Soldaten zu berechnen, die auf den Seiten des zweiten Quadrats (des ersten inneren) stehen, achten wir darauf, dass auf jeder Seite dieses Quadrats 2 Soldaten weniger stehen als auf der entsprechenden Seite des äußeren Quadrats.

Zwei Seiten enthalten also jeweils  $(x - 2)$ , die beiden restlichen Seiten dagegen  $(x - 4)$  Soldaten. Man kann sich davon leicht überzeugen, wenn man auch für diesen Fall, wie in der Abbildung eingezeichnet, Klammern setzt.

Auf den Seiten des zweiten Quadrats stehen also insgesamt

$$2(x - 2) + 2(x - 4) = 2x - 4 + 2x - 8 = 4x - 12$$

Soldaten. Die gleichen Überlegungen ergeben leicht die Anzahl der Soldaten auf den Seiten des dritten, des inneren Quadrats. Es gilt

$$2(x - 4) + 2(x - 6) = 2x - 8 + 2x - 12 = 4x - 20$$

insgesamt also

$$(4x - 4) + (4x - 12) + (4x - 20) = 12x - 36 \quad (8)$$

Bei der zweiten Aufstellung stehen  $\frac{9}{10}x$  der Soldaten auf einer Seite des Quadrats. Die Gesamtzahl im vollen Quadrat beträgt daher

$$\left(\frac{9}{10}x\right)^2 \quad (9)$$

Addiert man 3, so erhält man die Anzahl der Soldaten der gesamten Einheit. Es gilt also

$$\left(\frac{9}{10}x\right)^2 + 3 = 12x - 36 \quad (10)$$

Wir quadrieren

$$\frac{81}{100}x^2 + 3 = 12x - 36$$

multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit 100

$$81x^2 + 300 = 1200x - 3600$$

fassen zusammen, ordnen

$$81x^2 - 1200x + 3900 = 0$$

dividieren schließlich durch 3 und erhalten

$$27x^2 - 400x + 1300 = 0 \quad (11)$$

Hier ist  $\frac{\Delta}{4} = (200)^2 - 27 \cdot 1300 = 4900 = 70^2$ . Wir wenden die Formel (17) von Seite 28 an und erhalten

$$x_1 = \frac{200 - 70}{27} = \frac{130}{27} \quad ; \quad x_2 = \frac{200 + 70}{27} = 10$$

Beide Werte sind Wurzeln der Gleichung (11) und auch der Gleichung (10), aber nur der Wert  $x = 10$  ist Lösung der Aufgabe, denn  $x_1$  als gebrochene Zahl kann nicht die Anzahl der Soldaten sein.

Um deren Anzahl zu berechnen, setzen wir den gefundenen Wert  $x = 10$  in die Gleichung (8) ein und erhalten

$$12 \cdot 10 - 36 = 120 - 36 = 84$$



Die Einheit besteht aus 84 Soldaten.

### Übungen

16. Wie können wir in der letzten Aufgabe noch auf eine andere Art die Anzahl  $(12x - 36)$  der Soldaten in der Einheit berechnen bei gleicher Wahl der Unbekannten?

17. Die Summe zweier Zahlen ist 232. Wenn diese Zahlen in einem bestimmten nicht-dekadischen Zahlensystem geschrieben werden<sup>6</sup>, lautet die eine Zahl 201, die zweite 423. In welchem Zahlensystem sind diese Zahlen angegeben?

18. An einem Volleyballturnier einer Schule nehmen alle Klassen teil. Jede Klasse spielt mit jeder anderen ein Spiel. Das gesamte Turnier umfasst 15 Spiele. Wieviele Klassen beteiligen sich an diesem Turnier?

19. Es wurden für 240 Złoty Hefte einer besseren Qualität gekauft. Falls für die gleiche Summe um drei Złoty pro Stück billigere Hefte gekauft worden wären, so hätte man für die gleiche Summe vier Hefte mehr kaufen können. Wieviel kostete ein Heft der besseren Qualität?

---

<sup>6</sup>Über nichtdekadische Zahlensysteme kann man in folgenden Buch nachlesen: Krysicki, W.: Zählen und Rechnen einst und jetzt. Leipzig: Teubner-Verlag 1968.

## 7 Wir erraten eine gedachte Zahl

Das Rechnen mit Buchstaben und das Lösen von Gleichungen bieten viele Möglichkeiten, schnell und wirksam "gedachte Zahlen" zu erraten. Zur Orientierung und Anleitung geben wir folgendes Beispiel:

"Man denke sich irgendeine positive Zahl, berechne ihr Quadrat und addiere dazu das Vierfache der gedachten Zahl. Das erhaltene Ergebnis teile man durch die gedachte Zahl und multipliziere dann mit 100, subtrahiere 400 und multipliziere das Ergebnis mit der gedachten Zahl.

Man sage mir das Endergebnis, und ich nenne sofort die gedachte Zahl."

Wir denken uns irgendeine Zahl, z.B. 5, und führen in Gedanken die oben beschriebene Rechnung aus.

Das Quadrat von 5 ist 25, dazu addieren wir  $4 \cdot 5 = 20$  und erhalten  $25 + 20 = 45$ . Sodann teilen wir 45 durch die gedachte Zahl 5 und erhalten 9. Nun ist  $9 \cdot 100 = 900$ , und nach Subtraktion von 400 verbleiben 500; wir erhalten schließlich  $500 \cdot 5 = 2500$  und nennen: 2500.

Das Erraten der gedachten Zahl geht nun so vor sich, dass zunächst die beiden Nullen der letzten Stellen (sofern wir uns eine ganze Zahl gedacht haben) gestrichen werden und aus der so erhaltenen Zahl 25 schnell die Quadratwurzel gezogen wird.

Das Ergebnis 5 ist die gesuchte Zahl.

Begründung.

Die gedachte Zahl sei  $x$ , ihr Quadrat ist  $x^2$ , die Addition von  $4x$  ergibt  $x^2 + 4x$ . Anschließend teilen wir diese Zahl durch  $x$  und erhalten  $x + 4$ .

Nach Multiplikation mit 100 ergibt sich  $100x + 400$ , die Subtraktion von 400 liefert  $100x$ , und nach Multiplikation mit  $x$  erhalten wir  $100x^2$ .

Wenn uns das Ergebnis genannt wird, lassen wir die beiden Nullen weg, was einer Division durch 100 entspricht, und ziehen die Wurzel.

Die Gleichung  $100x^2 = 2500$  ergibt nach Division durch 100

$$x^2 = 25$$

und da  $x > 0$  sein soll, erhalten wir schließlich  $x = 5$ .

Das ist der letzte Schritt, um die gedachte Zahl zu erraten.

## 8 Quadratische Funktion und kanonische Darstellung

Die allgemeine Form der quadratischen Gleichung ist

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad (1)$$

Den Term auf der linken Seite der quadratischen Gleichung bezeichnen wir mit  $y$

$$y = ax^2 + bx + c \quad (2)$$

Obigen Ausdruck nennen wir quadratisches Polynom, Polynom zweiten Grades oder quadratisches Trinom (denn er besteht aus drei Ausdrücken).

In der Gleichung (2) hat  $x$  eine ganz andere Bedeutung als in Gleichung (1). In (1) bezeichnet die Größe  $x$  die Wurzeln  $x_1$  und  $x_2$  der Gleichung (sofern sie existieren), sie ist also das Symbol für bestimmte Zahlen (höchstens zwei).

Im Ausdruck (2) dagegen bezeichnet  $x$  eine völlig beliebige Zahl. Sie ist demnach eine Variable, der wir beliebige Werte zuordnen können. Daher nennen wir  $x$  eine unabhängige Variable.

Denken wir uns in (2) auf der rechten Seite für die Variable  $x$  eine beliebige reelle Zahl eingesetzt, so ergibt sich eine jeweils eindeutig bestimmte Zahl  $y$ .

Bekanntlich nennt man die Menge geordneter Paare reeller Zahlen

$$\{(x, y) | x \in D_f \text{ und } y = f(x)\}$$

eine Funktion mit dem Definitionsbereich  $D_f \subset \mathbb{R}$  und der Abbildungsvorschrift  $f(x)$ , mit der jeder reellen Zahl  $x \in D_f$  eindeutig eine reelle Zahl  $y = f(x)$  zugeordnet wird. Da das Polynom 2. Grades

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

für jede reelle Zahl  $x$  eine reelle Zahl  $y$  eindeutig festlegt, können wir  $D_f = \mathbb{R}$  wählen und erhalten mit der Menge geordneter Paare reeller Zahlen

$$\{(x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ und } y = ax^2 + bx + c\}$$

die sogenannte allgemeine quadratische Funktion mit den Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$ .

Da der Definitionsbereich festliegt, sprechen wir nun auch kurz von der quadratischen Funktion

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad (3)$$

Nullstellen einer quadratischen Funktion sind jene Werte  $x$ , für die der Funktionswert  $y$  gleich null ist, d. h. für die

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

gilt. Nullstellen sind also gerade die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Beschäftigen wir uns nun mit der quadratischen Funktion (3), die wir etwas umformen. Da der Koeffizient  $a \neq 0$  ist, können wir ihn ausklammern

$$f(x) = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \quad (4)$$

Der erste Ausdruck in der Klammer ist das Quadrat der Variablen  $x$ , den zweiten Ausdruck können wir in der Form

$$\frac{b}{a}x = 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}$$

schreiben, d.h. als das doppelte Produkt von  $x$  und  $\frac{b}{2a}$ . Um aber das Quadrat der Summe  $x + \frac{b}{2a}$  zu erhalten, fehlt das Quadrat des Ausdrucks  $\frac{b}{2a}$ .

Da  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$  ist, addieren wir in der Klammer von (4) den Bruch  $\frac{b^2}{4a^2}$  und subtrahieren anschließend wieder, um den Wert der Klammer nicht zu verändern. So erhalten wir

$$f(x) = a \left( \underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right)$$

Die ersten drei Ausdrücke in der Klammer (gekennzeichnet durch eine geschweifte Klammer) sind gleich  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ , die restlichen beiden bringen wir auf ihren Hauptnenner. Es ist dann

$$f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$$

Schließlich formen wir den zweiten Ausdruck in der eckigen Klammer um, indem wir das Vorzeichen vor dem Bruchstrich und entsprechend auch die Vorzeichen im Zähler ändern  $\frac{4ac - b^2}{4a^2} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ . Wir erhalten damit

$$f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \quad (5)$$

Diese Darstellung der quadratischen Funktion wird kanonische Darstellung genannt, denn sie stellt die Grundlage (Kanon) für die Untersuchung der Eigenschaften der quadratischen Funktion dar.

Beispiel. Es ist die quadratische Funktion

$$y = 3x^2 - 12x + 19$$

in kanonischer Darstellung anzugeben.

Wir berechnen zunächst die Diskriminante der quadratischen Funktion

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 19 = -84$$

Setzen wir sie in (5) ein, so erhalten wir

$$y = 3 \left[ \left( x - \frac{12}{2 \cdot 3} \right)^2 - \frac{-84}{4 \cdot 3^2} \right]$$

oder nach Vereinfachung

$$y = 3 \left[ (x - 2)^2 + \frac{7}{3} \right]$$

Beispiel. Es ist die quadratische Funktion

$$y = 4x^2 + 6x$$

in kanonischer Form darzustellen.

Die Diskriminante der quadratischen Funktion beträgt  $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0 = 36$ . Wir erhalten also

$$y = 4 \left[ \left( x - \frac{6}{2 \cdot 4} \right)^2 - \frac{36}{4 \cdot 4^2} \right]$$

und nach Vereinfachung

$$y = 4 \left[ \left( x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right]$$

## 9 Untersuchung des Wertebereichs der quadratischen Funktion

Die Untersuchung des Wertebereichs der quadratischen Funktion in der allgemeinen Form

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

würde in Abhängigkeit von der unabhängigen Variablen  $x$  in dieser allgemeinen Form auf einige Schwierigkeiten stoßen. Um die Untersuchung zu erleichtern, betrachten wir die kanonische Darstellung

$$y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

wobei  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Anschließend multiplizieren wir aus und erhalten

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad (2)$$

Setzen wir für  $x$  verschiedene Werte ein, so wird sich nur der erste Ausdruck  $a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  in (2) ändern; der zweite Ausdruck  $-\frac{\Delta}{4a}$  ist konstant, da er nicht von  $x$  abhängt. Der Ausdruck  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  ist als Quadrat positiv oder gleich null, wenn  $x + \frac{b}{2a} = 0$ , d.h.  $x = -\frac{b}{2a}$  ist.

Betrachten wir jetzt zwei Fälle in Abhängigkeit vom Vorzeichen des Koeffizienten  $a$ :

1.  $a > 0$ .

Der erste Ausdruck der rechten Seite von (2) als Produkt des Koeffizienten  $a > 0$  mit einem Quadrat, das nicht negativ sein kann, wird auch nicht negativ sein, d.h., er wird positiv oder gleich null sein. Null ist der kleinste Wert, den der Ausdruck  $a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  annehmen kann.

Das ist der Fall für  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Für keinen anderen Wert der Variablen  $x$  wird  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  gleich null, das Produkt  $a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  wird demnach positiv sein. Die rechte Seite der quadratischen Funktion

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

ist die Differenz zweier Ausdrücke, wobei der zweite Ausdruck (Subtrahend) konstant und der erste (Minuend) variabel ist. Wenn der erste Ausdruck abnimmt, so verringert sich auch die Differenz. Weil nun der kleinste Wert des ersten Ausdrucks null ist für  $x = -\frac{b}{2a}$ , hat auch die Differenz für diesen Wert ein Minimum, und zwar gleich  $-\frac{\Delta}{4a}$ . Auf diesem Wege kommen wir zu folgendem Ergebnis:

Wenn der Koeffizient  $a$  positiv ist, so hat die quadratische Funktion genau ein Minimum

$$y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{für} \quad x = -\frac{b}{2a}$$

Wenn dagegen die Variable  $x$  unbeschränkt wächst (wir sagen auch: wenn  $x$  gegen plus unendlich strebt, symbolisch:  $x \rightarrow \infty$ ), dann wächst der erste Ausdruck - wegen  $a > 0$  - ebenfalls unbeschränkt, und damit wächst auch die Differenz unbeschränkt.

Wenn nun die Variable  $x$  immer kleinere Werte annimmt, z.B. -10, -100, -1000000 usw., d.h., wenn sie gegen minus unendlich strebt, symbolisch:  $x \rightarrow -\infty$ ), so strebt  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  als Quadrat ebenfalls gegen plus unendlich. Daher wächst - wegen  $a > 0$  - der erste Ausdruck und damit auch die Differenz unbeschränkt.

Diese Ergebnisse für den Wertebereich der quadratischen Funktion wollen wir in folgender Tabelle angeben:

$x$	$-\infty$	wachsend	$-\frac{b}{2a}$	wachsend	$+\infty$
$y$	$+\infty$	fallend	Minimum $-\frac{\Delta}{4a}$	wachsend	$+\infty$

Anschließend wollen wir den zweiten Fall untersuchen.

2.  $a < 0$ .

In diesem Fall kann der erste Ausdruck in (2) negativ oder gleich null sein. Null ist aber der größte Wert, den  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  annehmen kann; das tritt ein für  $x = -\frac{b}{2a}$ . Wächst der Ausdruck  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  und ist der Subtrahend  $\frac{\Delta}{4a}$  konstant, so wächst die Differenz ebenfalls. Da der erste Ausdruck seinen größten Wert null für  $x = -\frac{b}{2a}$  erreicht, nimmt auch die Differenz für dieses  $x$  ihren größten Wert  $-\frac{\Delta}{4a}$ . Das erhaltene Ergebnis fassen wir in folgender Regel zusammen:

Ist der Koeffizient  $a$  negativ, so hat die quadratische Funktion genau ein Maximum  $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$  für  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Für  $x \rightarrow \infty$  strebt  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  als Quadrat ebenfalls gegen plus unendlich. Multiplizieren wir diese Größe mit  $a < 0$ , so strebt das Produkt  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  und damit auch die quadratische Funktion gegen minus unendlich.

Diese Ergebnisse für den Wertebereich der quadratischen Funktion  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a < 0$ , wollen wir in folgender Tabelle angeben:

$x$	$-\infty$	wachsend	$-\frac{b}{2a}$	wachsend	$+\infty$
$y$	$+\infty$	wachsend	Maximum $-\frac{\Delta}{4a}$	fallend	$-\infty$

Wenn eine Funktion ein Maximum oder Minimum annimmt, dann sagen wir, dass sie ein Extremum, d.h. einen Extremalwert, besitzt. Verwendet man diesen Begriff, so kann man die erhaltenen Ergebnisse für den Fall  $a > 0$  und auch für den Fall  $a < 0$  in einem Satz zusammenfassen:

Für  $x = -\frac{b}{2a}$  die quadratische Funktion genau ein Extremum  $y_{\text{extr}} = -\frac{\Delta}{4a}$ .

Beispiel. Es ist das Extremum der Funktion

$$y = 4x^2 - 5x - 1$$

zu bestimmen. Wir berechnen  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{8}$  und anschließend  $\Delta = b^2 - 4ac = 41$ . Folglich ist  $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{41}{16}$ .

Daraus folgt, dass die quadratische Funktion  $y = 4x^2 - 5x - 1$  für  $x = \frac{5}{8}$  ein Extremum  $y = -\frac{41}{16}$  besitzt, und wegen  $a = 4 > 0$  ist es ein Minimum.

Beispiel. Es ist das Extremum der quadratischen Funktion

$$y = -x^2 + 8x - 14$$

zu finden. Hier ist  $x = -\frac{b}{2a} = 4$ , und die Diskriminante ist  $\Delta = 8$ . Daraus folgt  $-\frac{\Delta}{4a} = 2$ .

Da  $a = -1 < 0$ , hat die quadratische Funktion  $y = -x^2 + 8x - 14$  ein Maximum  $y = 2$  an der Stelle  $x = 4$ .

Die Möglichkeit, das Extremum einer quadratischen Funktion zu finden, erlaubt es uns in vielen Fällen, bestimmte Probleme leicht zu lösen. Als Beispiel betrachten wir folgende Aufgabe.

Aufgabe. Wie ändert sich die Fläche eines Rechtecks mit dem konstanten Umfang 24 m, wenn sich seine Seiten ändern?

Wir nennen die Länge einer Seite des Rechtecks  $x$ . Der Umfang des Rechtecks beträgt 24 m, der halbe Umfang ist demnach 12 m. Die Länge der anderen Seite des Rechtecks ist dann  $12 - x$ . Die Fläche des Rechtecks nennen wir  $y$ , folglich ist

$$y = x(12 - x)$$

Wir haben also den Verlauf der Funktion

$$y = -x^2 + 12x \tag{3}$$

zu untersuchen. Zunächst berechnen wir  $x = -\frac{b}{a} = 6$ ,  $\Delta = 144$ , d.h.  $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = 36$ . (Diesen Wert kann man auch berechnen, indem man  $x = 6$  in (3) einsetzt.)

Da der Koeffizient  $a = -1 < 0$  ist, erreicht die quadratische Funktion für  $x = 6$  ihr Maximum  $y = 36$ , d.h., für  $x = 6$  hat die Fläche des Rechtecks ihren größten Wert  $y = 36 \text{ m}^2$ .

Wir stellen leicht fest, dass dann die andere Seite des Rechtecks ebenfalls 6 m beträgt. Das Ergebnis können wir also folgendermaßen formulieren und verallgemeinern:

Von allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat jeweils das Quadrat die größte Fläche.

Die Fläche des Rechtecks wächst von  $0 \text{ m}^2$  (für  $x = 0 \text{ m}$ ) bis  $36 \text{ m}^2$  (wenn  $x = 6 \text{ m}$ ) und nimmt dann wieder ab bis  $0 \text{ m}^2$  (wenn  $x = 12 \text{ m}$ ).

## Übungen

20. Es sind die Extremwerte folgender quadratischer Funktionen zu berechnen!

a)  $y = x^2 - 14x + 28$ ,

b)  $y = -2x^2 + 8x - 8$ ,



c)  $y = 25x^2 - 20x + 4$ ,

d)  $y = -x^2 + 2x - 20$ ,

e)  $y = -9x^2 - 12x - 5$ ,

f)  $y = x^2 + 8x - 16$ .

## 10 Produktdarstellung der quadratischen Funktion

Wie wir schon wissen, nennen wir

$$y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \quad (1)$$

wobei  $\Delta = b^2 - 4ac$  ist, die kanonische Darstellung der quadratischen Funktion

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Nehmen wir an, dass die Diskriminante positiv oder null sei, dann ist  $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ , und man kann die kanonische Darstellung in der Form

$$y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} \right]$$

schreiben. Da der Nenner  $4a^2 = (2a)^2$  ist, enthält die eckige Klammer die Differenz zweier Quadrate, die in das Produkt einer Summe und einer Differenz umgeformt werden kann

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right)$$

In jeder Klammer treten zwei Brüche mit dem gleichen Nenner  $2a$  auf; wir können sie also in einem Bruch zusammenfassen. Wenn wir noch das Vorzeichen zweimal ändern, und zwar vor dem Bruch und außerdem noch im Zähler, so nimmt der letzte Ausdruck folgende Gestalt an:

$$y = a \left( x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

Beide Brüche sind wohlbekannte Ausdrücke, es sind die Wurzeln  $x_1$  und  $x_2$  der quadratischen Gleichung. Damit erhalten wir schließlich die Darstellung der quadratischen Funktion als Produkt. Für  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$  ist

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (2)$$

Wenn  $\Delta = 0$ , so sind die Wurzeln gleich,  $x_1 = x_2$ . Natürlich gilt Formel (2) auch dann, und man kann sie in der Form

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

schreiben, die sich für  $\Delta = 0$  auch direkt aus der kanonischen Darstellung ergibt. Die quadratische Funktion lässt sich im Falle  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$  also stets in der Form (2) schreiben.

Ist  $\Delta < 0$ , dann hat die quadratische Funktion keine reellen Nullstellen und kann auch

nicht in (reelle) Faktoren ersten Grades zerlegt werden.

Beispiel 1. Man schreibe, sofern das möglich ist, die quadratische Funktion

$$y = 5x^2 - 7x - 12$$

als Produkt. Wir berechnen die Diskriminante  $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-12) = 289 = 17^2$ . Nullstellen der Funktion sind also die Zahlen  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = \frac{12}{5}$ , und wir erhalten folgende Zerlegung der quadratischen Funktion

$$y = 5[x - (-1)] \left(x - \frac{12}{5}\right) \quad \text{oder} \quad y = 5(x + 1)(x - 2,4) = (x + 1)(5x - 12)$$

Beispiel 2. Man zerlege, sofern das möglich ist, die quadratische Funktion

$$y = -3x^2 + 12x - 12$$

in Faktoren ersten Grades. Die Diskriminante beträgt  $\Delta = 12^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-12) = 0$ . Wir berechnen die Wurzeln  $x_1 = x_2 = \frac{b}{2a} = 2$ . In diesem Falle erhalten wir die Zerlegung

$$y = -3(x - 2)(x - 2) \quad \text{oder einfacher} \quad y = -3(x - 2)^2$$

Beispiel 3. Man zerlege, sofern das möglich ist, die quadratische Funktion

$$y = x^2 - 9x + 25$$

in Faktoren ersten Grades. Die Diskriminante  $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = -19 < 0$  ist kleiner als null, d.h., die quadratische Funktion hat keine reellen Nullstellen und lässt sich deshalb nicht in Faktoren ersten Grades zerlegen.

Mit Hilfe der Zerlegung einer quadratischen Funktion in Faktoren kann man manchmal rationale Ausdrücke vereinfachen.

Beispiel 4. Der rationale Ausdruck

$$\frac{4x^2 - 7x - 11}{5x^2 + 8x + 3}$$

ist zu vereinfachen, sofern das möglich ist.

Die Diskriminante des Zählers ist  $\Delta = 225 = 15^2$ . Nun berechnen wir die Wurzeln des Zählers  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = \frac{11}{4}$  und erhalten die Zerlegung

$$4x^2 - 7x - 11 = 4(x + 1) \left(x - \frac{11}{4}\right)$$

Analog verfahren wir mit dem Nenner:  $\Delta = 4 = 2^2$ , die Wurzeln des Nenners lauten  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = -\frac{3}{5}$ , und es ist

$$5x^2 + 8x + 3 = 5(x + 1) \left(x + \frac{3}{5}\right)$$

Wir erhalten daher

$$\frac{4x^2 - 7x - 11}{5x^2 + 8x + 3} = \frac{4(x+1)\left(x - \frac{11}{4}\right)}{5(x+1)\left(x + \frac{3}{5}\right)} = \frac{4\left(x - \frac{11}{4}\right)}{5\left(x + \frac{3}{5}\right)} = \frac{4x - 11}{5x + 3}$$

Den Bruch können wir mit dem Faktor  $(x + 1)$  kürzen, sofern er nicht null ist (das Teilen durch Null ist nicht zulässig). Die Vereinfachung des Bruches ist also möglich für  $x + 1 \neq 0$ , d.h.  $x \neq -1$ .

### Übungen

21. Es sind die folgenden quadratischen Funktionen in Produktform zu schreiben!

- a)  $y = 4x^2 + 7x + 3$ ,
- b)  $y = x^2 - 9x + 18$ ,
- c)  $y = x^2 + 6x - 16$ ,
- d)  $y = -x + 2x + 3$ ,
- e)  $y = -2x^2 + 18$ .

22. Ist die quadratische Funktion  $y = x^2 - mx + 4$  für jeden Wert von  $m$  in Faktoren ersten Grades zerlegbar?

23. Es sind die Brüche

$$a) \frac{2x^2 - 5x + 3}{6x^2 - 7x + 1} \quad , \quad b) \frac{x^2 - 7x + 10}{3x^2 + x - 14}$$

zu vereinfachen. Für welche Werte  $x$  sind die beiden Darstellungen jeweils nicht äquivalent?

# 11 Rechtwinkliges Koordinatensystem

Um die geographische Lage irgendeines Berges oder einer Stadt zu bestimmen, verwenden wir Koordinaten: die geographische Länge und die geographische Breite. So bezeichnen z.B. die geographische Länge  $21^\circ$  (östlich von Greenwich) und die nördliche geographische Breite von  $52^\circ$  die Lage der Stadt Warszawa auf der Erdkugel (beide Zahlen sind abgerundet auf ganze Grade und bestimmen natürlich die Lage eines bestimmten Punktes, nicht einer ganzen Stadt).

Auf diese Weise können wir durch zwei Zahlen - die geographische Länge (östlich oder westlich von Greenwich) und die geographische Breite (nördlich oder südlich des Äquators) - die Lage jedes Punktes der Erde (mit Ausnahme der beiden Pole, für die die Breitenangabe genügt) genau bestimmen.

Im täglichen Leben, in der Technik, in der Mathematik und in vielen anderen Bereichen tritt häufig das Problem auf, die genaue Lage eines Punktes in einer gegebenen Zeichnung zu bestimmen. Zeichnungen werden in der Regel auf einem ebenen Bogen Papier ausgeführt, und daraus ergibt sich das Bedürfnis, eine Methode zu finden, die Lage eines Punktes in der Ebene mit Hilfe zweier Zahlen zu bestimmen.

Das geschieht nun folgendermaßen:

Wir zeichnen zwei senkrecht aufeinanderstehende Geraden  $Ox$  und  $Oy$  und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit  $O$ . Dieser Punkt heißt Koordinatenursprung. Eine Hälfte jeder Geraden nennen wir positiv und kennzeichnen sie mit einem Pfeil; einen beliebigen Abschnitt auf jeder Geraden wählen wir als Längeneinheit. Ein solches Achsenpaar heißt rechtwinkliges Koordinatensystem (vgl. Abb. 3).

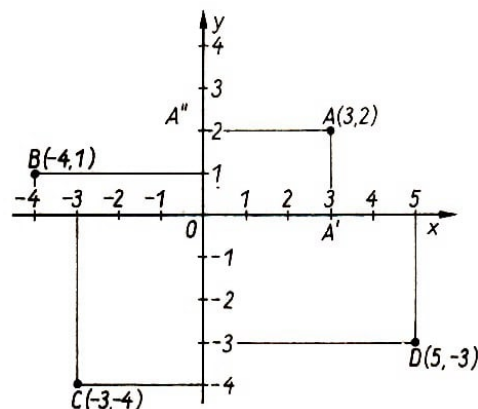


Abb. 3

Die Achse  $\overrightarrow{Ox}$  nennen wir  $x$ -Achse oder Abszissenachse, die Achse  $\overrightarrow{Oy}$   $y$ -Achse oder Ordinatenachse.

Der Punkt  $A$  liege in der  $x, y$ -Ebene. Wir fällen von  $A$  das Lot  $AA'$  auf die  $x$ -Achse und das Lot  $AA''$  auf die  $y$ -Achse.

Die Länge des Abschnitts  $OA'$  mit entsprechendem Vorzeichen nennen wir die Abszisse des Punktes  $A$  (in Abb. 3 ist die Abszisse  $OA'$  positiv, denn die Strecke vom Koordinatenursprung  $O$  zum Punkt  $A'$  liegt auf dem positiven Teil der  $x$ -Achse). Die Abszisse bezeichnen wir mit  $x$ . In der Abb. 3 hat der Punkt  $A$  die Abszisse  $x = +3$ .

Die Länge des Abschnitts  $OA''$  mit entsprechendem Vorzeichen nennen wir die Ordinate des Punktes  $A$  (in Abb. 3 ist die Ordinate  $OA''$  positiv, denn die Strecke vom Koordinatenursprung  $O$  zum Punkt  $A''$  liegt auf dem positiven Teil der  $y$ -Achse). Die Ordinate bezeichnen wir mit  $y$ . In der Abbildung ist  $y = +2$  die Ordinate des Punktes  $A$ .

Abszisse und Ordinate heißen die Koordinaten eines Punktes.  $A(+3, +2)$  ist die Koordinatendarstellung des Punktes  $A$ , wobei wir beachten, dass stets die erste Zahl des Zahlenpaares die Abszisse  $x$ , die zweite die Ordinate  $y$  bezeichnet.

Der Punkt  $B$  in der Zeichnung hat die Koordinaten  $x = -4$ ,  $y = +1$ , und wir schreiben  $B(-4, +1)$ . Analog hat der Punkt  $C$  die Koordinaten  $x = -3$ ,  $y = -4$ , wir schreiben  $C(-3, -4)$  und schließlich  $D(+5, -3)$ .

Liegt ein Punkt auf der  $x$ -Achse, dann ist seine Ordinate  $y = 0$ . So sind z.B.  $x = +3$ ,  $y = 0$  die Koordinaten des Punktes  $A'$ . Liegt ein Punkt auf der  $y$ -Achse, so ist seine Abszisse  $x = 0$ , z.B.  $A''(0, +2)$ . Der Koordinatenursprung hat die Koordinaten  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

Damit entsprechen jedem Punkt der Ebene eindeutig zwei Zahlen  $x$  und  $y$  seine Koordinaten. Umgekehrt entspricht jedem Zahlenpaar  $(x, y)$  bei gegebenem rechtwinkligem Koordinatensystem genau ein Punkt der Ebene. Sind also die rechtwinkligen Koordinaten eines bestimmten Punktes  $K(4, -3)$  gegeben, so ist die Lage des Punktes eindeutig bestimmt (Abb. 4).

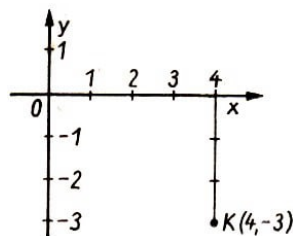


Abb. 4



Abb. 5

Das rechtwinklige Koordinatensystem wurde (in einer etwas vereinfachten Form) im 17. Jahrhundert von dem französischen Mathematiker und Philosophen René Descartes (lat. Cartesius) eingeführt (Abb. 5). Deshalb wird das rechtwinklige Koordinatensystem in der Ebene auch kartesisches Koordinatensystem genannt. Die Koordinatenachsen  $\vec{Ox}$  und  $\vec{Oy}$  teilen die Ebene in vier Teile, Quadranten genannt, wobei die Wahl der Vorzeichen so erfolgt, dass

- im I. Quadranten  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,
- im II. Quadranten  $x < 0$ ,  $y > 0$ ,
- im III. Quadranten  $x < 0$ ,  $y < 0$  und
- im IV. Quadranten  $x > 0$ ,  $y < 0$  gilt.

## Übungen

24. Es ist ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu zeichnen und die Lage der folgen-

den Punkte zu bestimmen:  $A(-3, 1)$ ,  $B(2, -7)$ ,  $C(0, 5)$ ,  $D(5, 3)$ ,  $E(-1, -1)$ ,  $F(4, 0)$ ,  $G(0, -3)$ ,  $H(-6, 0)$ .

25. Es ist das Dreieck  $\triangle ABC$  mit den Eckpunkten  $A(-2, 2)$ ,  $B(3, 4)$ ,  $C(4, -5)$  zu zeichnen!

26. Ohne die Punkte zu zeichnen ist festzustellen, in welchen Quadranten sie jeweils liegen:  $A(4, -3)$ ,  $B(-2, -5)$ ,  $C(2\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ ,  $D(0, -10)$ ,  $E(-10, 28)$ ,  $F(25, 0)$ .

## 12 Graph einer Funktion zweiten Grades. Wie lösen wir eine quadratische Gleichung graphisch?

Wir betrachten die Funktion  $y = x^2$ . Wählen wir für  $x$  einige beliebige Werte und schreiben darunter die entsprechenden Funktionswerte  $y$ , so erhalten wir eine sogenannte Wertetabelle der Funktion  $y = x^2$ .

$x$	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$y$	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25

Für jedes Zahlenpaar  $(x, y)$  zeichnen wir den entsprechenden Punkt in einem rechtwinkligen Koordinatensystem. Berechnen wir  $y$  für weitere Werte, z.B.  $x = -2,4$ ,  $x = -2,3$  usw., so erhalten wir damit weitere Punkte: sie alle liegen auf einer gekrümmten Kurve, die das Bild (Graph) der Funktion  $y = x^2$  darstellt. Diese Kurve wird Parabel (zweiten Grades) genannt.

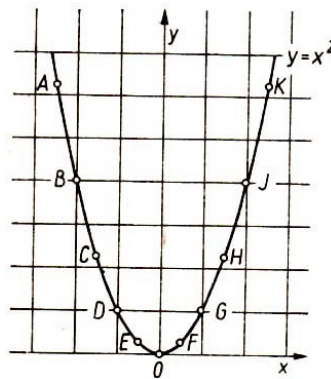


Abb. 6

Man kann allgemein sagen: Als Graph (graphische Darstellung) der Funktion  $y = f(x)$  bezeichnen wir die Menge (den geometrischen Ort) aller Punkte der Ebene, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen.

Dem Bild der Funktion  $y = x^2$  (Abb. 6) kann man den Verlauf dieser Funktion entnehmen. Durchläuft die Variable  $x$  die Werte von -2,5 bis 0, so nehmen die entsprechenden Funktionswerte  $y$  von 6,25 bis 0 ab (die Funktion fällt). Wächst die Variable  $x$  von 0 bis 2,5, so wachsen die entsprechenden Funktionswerte  $y$  von 0 auf 6,25 (die Funktion steigt).

Die Funktion nimmt für  $x = 0$  ihren kleinsten Wert  $y = 0$  an. Diesen Punkt nennen wir Scheitel der Parabel.

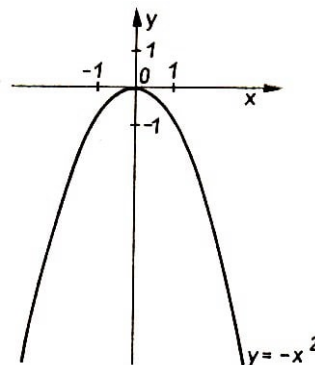


Abb. 7



Dem Graphen der Funktion können wir aber auch genähert die Funktionswerte  $y$  entnehmen, z.B. für  $x = 1,9$  lässt sich  $y = 3,6$  ablesen (der genaue Wert ist  $1,9^2 = 3,61$ ; er unterscheidet sich von dem abgelesenen Wert nur um 0,01).

Der Graph der Funktion  $y = -x^2$  ist in seiner Form identisch mit dem Graphen der Funktion  $y = x^2$ ; er ist nur im Koordinatensystem anders angeordnet (Abb. 7).

Wir zeichnen noch das Bild der Funktion

$$y = x^2 - 2x + 1$$

die wir auch in der Form

$$y = (x - 1)^2$$

schreiben können. Nun fertigen wir eine Wertetabelle an:

$x$	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$y$	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25

Vergleichen wir die Wertetabellen der Funktionen  $y = x^2$  und  $y = (x_1)^2$ , so sehen wir, dass beide Funktionen die gleichen Werte annehmen für jeweils sich um 1 unterscheidende  $x$ -Werte. Stellen wir noch folgende Funktionswerte zusammen:

für die Funktion $y = x^2$	für die Funktion $y = (x - 1)^2$
$f(-2,5) = 6,25$	$f(-1,5) = 6,25$
$f(-2) = 4$	$f(-1) = 4$
$f(0) = 0$	$f(1) = 0$
$f(1,5) = 2,25$	$f(2,5) = 2,25$

Die  $x$ -Werte (in den Klammern) auf der rechten Seite der obigen Zusammenstellung sind jeweils um 1 größer als die entsprechenden Werte der Variablen  $x$  (in der gleichen Zeile) auf der linken Seite, denn es ist  $-2,5 + 1 = -1,5$ ,  $-2 + 1 = -1$ ,  $0 + 1 = 1$ ,  $1,5 + 1 = 2,5$  usw.

Geometrisch bedeutet dies, dass sich der Graph der Funktion  $y = (x - 1)^2$  aus dem Graphen der Funktion  $y = x^2$  durch Verschiebung um 1 in Richtung der  $x$ -Achse ergibt (Abb. 8).

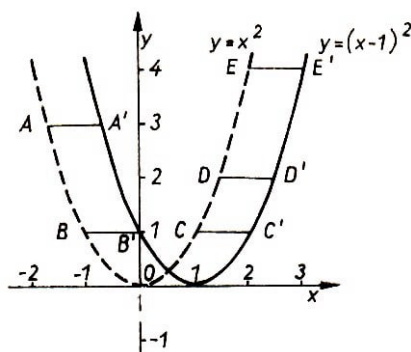


Abb. 8

Schließlich wollen wir den Graphen der Funktion

$$y = x^2 + 2x - 3$$

zeichnen. Zunächst stellen wir die Funktion in ihrer kanonischen Form

$$y = (x + 1)^2 - 4$$

dar. Den Graphen der Funktion  $y = (x+1)^2$  erhalten wir aus dem Graphen der Funktion  $y = x^2$  durch Verschiebung um 1 nach links, d.h. um -1. Wir vergleichen jetzt die zwei Funktionen

$$y = (x + 1)^2 \quad \text{und} \quad y = (x + 1)^2 - 4$$

Wir sehen, dass für jeweils den gleichen Wert  $x$  der Funktionswert  $y$  der zweiten Funktion um 4 kleiner ist als der Funktionswert  $y$  der ersten Funktion. (So ist z.B. für die erste Funktion  $f(-2) = 1$ , für die zweite dagegen ist  $f(-2) = -3$  usw.)

Weil diese Eigenschaft für jeden Wert  $x$  gilt (Abb. 9), schließen wir:

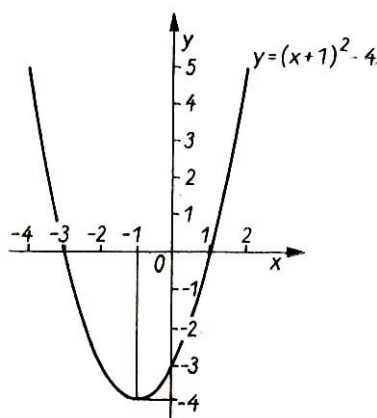


Abb. 9

Der Graph der Funktion  $y = (x + 1)^2 - 4$  entsteht aus dem Graphen der Funktion  $y = x^2$  durch 2 parallele Verschiebungen: eine um  $-1$  in Richtung der  $x$ -Achse (d.h. um 1 nach links) und eine um  $-4$  in Richtung der  $y$ -Achse (d.h. um 4 Einheiten nach unten).

Der Scheitel der Parabel befindet sich also im Punkt  $(-1, -4)$ . Die Parabel schneidet die  $x$ -Achse in den Punkten mit den Abszissen  $x = -3$  und  $x = 1$  und den Ordinaten  $y = 0$  für beide Punkte. Das sind die Wurzeln der Gleichung  $x^2 + 2x - 3 = 0$ , die sich für  $y = 0$  ergibt.

Betrachten wir nun die allgemeine Form der Funktion zweiten Grades  $y = ax^2 + bx + c$  und schreiben sie in der uns schon bekannten Form

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Stellen wir die gleichen Überlegungen an wie bei den vorangegangenen Beispielen, so kommen wir zu der Feststellung, dass das Bild der Funktion  $y = ax^2 + bx + c$  gleichfalls eine Parabel ist wie das Bild der Funktion  $y = ax^2$  (Abb. 10), allerdings mit veränderter Lage im Koordinatensystem.

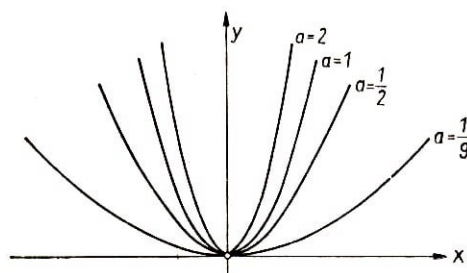


Abb. 10

Nennen wir  $x + \frac{b}{2a} = x'$ ,  $y + \frac{\Delta}{4a} = y'$ , so erhalten wir  $y' = ax'^2$  und folgern daraus:

Der Graph der Funktion  $y = ax^2 + bx + c$  entsteht aus dem Graphen der Funktion  $y = ax^2$  durch zwei parallele Verschiebungen: eine um  $-\frac{b}{2a}$  in Richtung der  $x$ -Achse, die zweite um  $-\frac{\Delta}{4a}$  in Richtung der  $y$ -Achse (Abb. 11).

Anders ausgedrückt: alle Funktionen zweiten Grades mit den gleichen Koeffizienten  $a$  sind Parabeln der gleichen Form. Die Abbildung 10 zeigt den Einfluss des Koeffizienten  $a$  auf das Bild der Funktion.

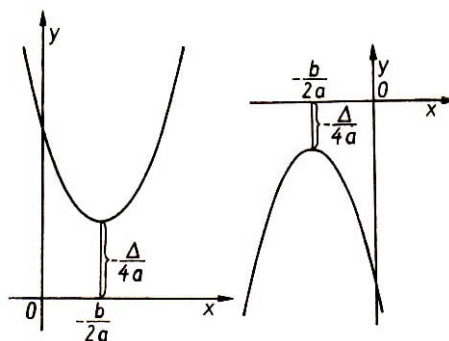


Abb. 11 und 12

Der Scheitel der Parabel der Funktion  $y = ax^2 + bx + c$  liegt im Punkt  $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ . Die Werte  $x = -\frac{b}{2a}$  und  $y = -\frac{\Delta}{4a}$  sind uns schon aus unserer Betrachtung des Wertebereiches der quadratischen Funktion bekannt: für  $x = -\frac{b}{2a}$  hat die Funktion ein Extremum  $y = -\frac{\Delta}{4a}$ . Die Abbildungen 11 und 12 illustrieren die Fälle  $a > 0$  und  $a < 0$ .

Hat eine quadratische Funktion zwei unterschiedliche Wurzeln ( $\Delta > 0$ ), d.h. nimmt  $y$  zweimal den Wert Null an, dann schneidet die Parabel die  $x$ -Achse in zwei Punkten; die Abszissen der Schnittpunkte sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung.

Hat eine quadratische Funktion eine Doppelwurzel ( $\Delta = 0$ ), so hat die Parabel einen Punkt mit der  $x$ -Achse gemeinsam. Seine Abszisse  $x = -\frac{b}{2a}$  ist gleich der Doppelwurzel der quadratischen Funktion.

Hat eine quadratische Funktion keine reellen Wurzeln ( $\Delta < 0$ ), so hat die Parabel keine gemeinsamen Punkte mit der  $x$ -Achse.

Unter Anwendung der obigen Sätze kann man eine quadratische Gleichung auch graphisch lösen. Wollen wir dies beispielsweise für die Gleichung

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

tun, dann zeichnen wir den Graphen der Funktion  $y = x^2 - 8x + 12$ . Wir erhalten eine Parabel, die die  $x$ -Achse in zwei Punkten mit den Abszissen  $x = 2$  und  $x = 6$  schneidet, das sind also die Wurzeln der Gleichung (Abb. 13).

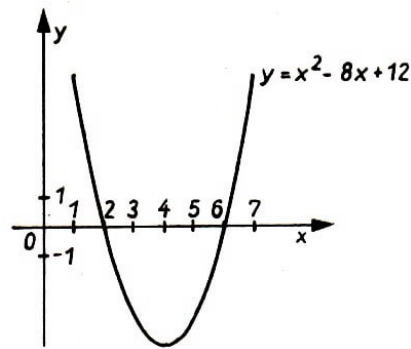


Abb. 13

### Übungen

27. Es sind die Graphen der Funktionen

a)  $y = x^2 - 9$ ,   b)  $y = -x^2 + 1$ ,   c)  $y = x^2 + 16$  zu zeichnen!

28. Es ist eine Wertetabelle für die Funktion  $y = \frac{1}{4}x^2$  für die ganzzahligen Werte  $x$  von -6 bis +6 anzulegen!

29. Welche Beziehung besteht zwischen der Lage der Graphen der Funktionen  $y = -x^2$  und  $y = -(x + 4)^2$ ?

30. Welche Verschiebungen sind vorzunehmen, damit sich der Graph der Funktion

a)  $y = -2x^2$  mit dem Graphen der Funktion  $y = -2(x - 3)^2$ ,

b)  $y = 3x^2$  mit dem Graphen der Funktion  $y = (3x - 1)^2$ ,

c)  $y = x^2$  mit dem Graphen der Funktion  $y = x^2 - 12x + 31$  deckt?

31. In wievielen Punkten schneiden die nachfolgenden Parabeln die  $x$ - Achse? Es sind die Punkte anzugeben!

a)  $y = x^2 - 7x - 8$ ,

b)  $y = -x^2 + 4x - 11$ ,

c)  $y = 4x^2 - 4x + 1$ ,

d)  $y = 25x^2 + 30x + 9$ ,

e)  $y = -x^2 - x + 12$ ,

f)  $y = 4x^2 - 7x$ ,

g)  $y = 2x^2 + 15$ .

32. Schneidet jede Funktion  $y = ax^2 + bx + c$  die  $y$ -Achse?

# 13 Vorzeichen der Werte einer quadratischen Funktion

Der Wert der quadratischen Funktion  $y = ax^2 + bx + c$  lässt sich immer in der kanonischen Form

$$y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \quad (1)$$

darstellen. Er ist das Produkt zweier Faktoren; von den Vorzeichen jedes der beiden Faktoren hängt das Vorzeichen des Funktionswertes ab. Auch bei diesem Problem muss man drei Fälle in Abhängigkeit vom Vorzeichen der Diskriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  unterscheiden:

$$1. \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Der Bruch  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  hat in diesem Falle einen negativen Zähler und einen positiven Nenner: der Bruch ist also negativ und der Ausdruck  $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  ist demnach positiv.

Die eckige Klammer enthält die algebraische Summe zweier Summanden, wobei der erste als Quadrat nicht negativ ist, während der zweite, wie wir gezeigt haben, positiv ist. Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist demnach für jeden Wert der Variablen  $x$  positiv.

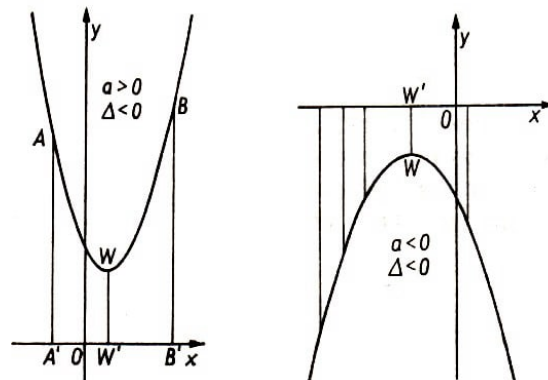


Abb. 14 und 15

Das Vorzeichen des Produkts (1) hängt also nur vom Vorzeichen des ersten Faktors ab, d.h. vom Koeffizienten  $a$ .

Ist der erste Faktor  $a > 0$ , so ist das Vorzeichen der Funktionswerte positiv für alle Werte der Variablen  $x$ . Ist dagegen der Koeffizient  $a < 0$ , so ist das Vorzeichen für alle Werte  $x$  negativ. Diese beiden Fälle können wir zusammenfassen.

**Satz 1.** Ist die Diskriminante negativ ( $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ), so stimmt das Vorzeichen der Funktionswerte der quadratischen Funktion für alle Werte der unabhängigen Variablen  $x$  überein mit dem Vorzeichen des ersten Koeffizienten  $a$ .

Abb. 14 veranschaulicht den Fall  $a > 0$  sehr deutlich.

Ist die Abszisse  $x = \overrightarrow{OA'}$ , so ist der Funktionswert  $\overrightarrow{A'A}$  positiv. Ist die Abszisse  $x = \overrightarrow{OB'}$ , so ist der Funktionswert  $y = \overrightarrow{B'B}$  ebenfalls positiv.

Auch der kleinste Funktionswert  $y_{\min} = \overrightarrow{W'W}$  ist positiv, was sich auch aus der Gleichung  $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$  wegen  $\Delta < 0$  und  $a > 0$  ergibt.

Ähnlich verhält es sich im Falle  $a < 0$  (Abb. 15). Ist  $x = \overrightarrow{OW'}$ , so hat die Funktion den größten (negativen) Wert (Maximum)  $y = \overrightarrow{W'W}$ .

Man sollte dabei beachten, dass der Abschnitt  $W'W$ , obwohl er der kürzeste aller in der Abb. 15 eingezeichneten Abschnitte (Ordinaten) ist, als Zahlenwert, als negative Ordinate, doch der größte Wert ist (so ist z.B.  $-1 > -2$ ). Alle anderen Ordinaten sind kleiner.

Beispiel. Es ist das Vorzeichen der Funktionswerte

$$y = 3x^2 - x + 2$$

für alle reellen Zahlen  $x$  zu untersuchen. Die Diskriminante ist  $\Delta = -23 < 0$ , der erste Koeffizient  $a = 3 > 0$ ; die Funktionswerte von  $y = 3x^2 - x + 2$  sind positiv für alle Werte  $x$ .

Wählen wir z.B.  $x = 1$ , so erhalten wir  $f(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 4 > 0$ ; welchen Wert wir für  $x$  auch in die Gleichung einsetzen, wir erhalten für  $y$  immer positive Werte.

Beispiel. Es ist das Vorzeichen der Funktionswerte

$$y = -x^2 + 6x - 10$$

zu untersuchen. Hier ist  $\Delta = -4 < 0$ , der erste Koeffizient  $a = -1 < 0$ ; die Funktionswerte der untersuchten Funktion werden also für alle Werte  $x$  negativ sein. Für  $x = 2$  ist  $f(2) = -2$  usw.

Wir betrachten nun den zweiten Fall.

$$2. \Delta = b^2 - 4ac = 0$$

Die kanonische Form vereinfacht sich hier zu

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

wieder ist aber die rechte Seite das Produkt zweier Faktoren.

Der zweite Faktor ist als Quadrat positiv; das Vorzeichen der Funktion hängt also nur vom ersten Faktor  $a$  ab. Ist  $x = -\frac{b}{2a}$ , so ist der zweite Faktor gleich null, und damit ist auch  $y$  für diesen Wert gleich null.

Dagegen ist für  $x \neq -\frac{b}{2a}$  der zweite Faktor positiv, und das Vorzeichen der Funktionswerte hängt nur vom Vorzeichen des ersten Faktors  $a$  ab. Die gleichen Überlegungen, die wir im Fall 1) vorgenommen haben, führen hier zu folgendem Ergebnis:

Satz 2. Ist die Diskriminante gleich null ( $\Delta = 0$ ), so stimmt das Vorzeichen der Werte der quadratischen Funktion für alle  $x$  mit dem Vorzeichen des ersten Koeffizienten  $a$  überein (mit der Ausnahme  $x = -\frac{b}{2a}$ ; für diesen Wert ist  $y = 0$ ).

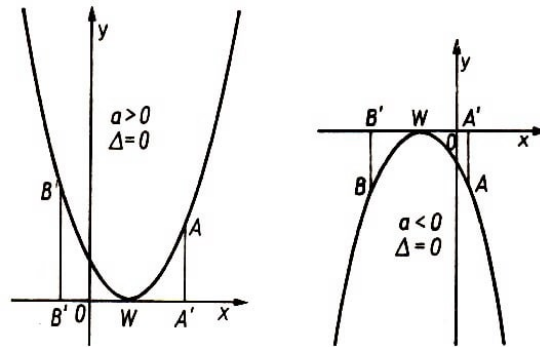


Abb. 16 und 17

In Abb. 16 sehen wir, dass alle Ordinaten, z.B.  $\overrightarrow{AA'}$ ,  $\overrightarrow{BB'}$  positiv sind, mit Ausnahme der Ordinate  $y = 0$  für die Abszisse  $x = \overrightarrow{OW}$ . In Abb. 17 sind alle Ordinaten, z.B.  $\overrightarrow{AA'}$ ,  $\overrightarrow{BB'}$ , negativ, mit Ausnahme der Ordinate  $y = 0$  für die Abszisse  $x = \overrightarrow{OW}$ .

Beispiel. Es ist das Vorzeichen der Funktionswerte

$$y = -9x^2 + 6x - 1$$

zu untersuchen. Die Diskriminante ist  $\Delta = 0$ , der erste Koeffizient ist  $a = -9 < 0$ ; also sind die Werte für alle  $x$  negativ mit der Ausnahme  $x = \frac{1}{3}$ ; für diesen Wert ist  $y = 0$ .

Schließlich wollen wir den dritten und letzten Fall betrachten.

$$3. \Delta = b^2 - 4ac > 0$$

Jetzt kann die quadratische Funktion in die Form

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

gebracht werden. Für die Werte  $x = x_1$  und  $x = x_2$  ist der Funktionswert gleich null. Bei der Vorzeichendiskussion im Fall  $\Delta > 0$  muss man beachten, dass die Zahlen  $x_1$  und  $x_2$  den Definitionsbereich (d.h. die  $x$ -Achse) in drei Intervalle teilen:

$$\begin{array}{c} x_1 \qquad \qquad x_2 \\ \hline x < x_1 \quad x_1 < x < x_2 \quad x_2 < x \end{array}$$

Wir untersuchen in jedem dieser Intervalle das Vorzeichen:

a) Für  $x < x_1$  ist  $(x - x_1) < 0$ . Aus  $x_2 > x_1$  folgt ebenfalls  $(x - x_2) < 0$ , und das Produkt  $(x - x_1)(x - x_2)$  ist als Produkt zweier negativer Faktoren positiv. Das Vorzeichen von  $y$  stimmt hier also mit dem Vorzeichen des ersten Koeffizienten  $a$  überein.

b)  $x_1 < x < x_2$ . Setzen wir für  $x$  einen beliebigen Wert aus dem Intervall mit den Grenzen  $x_1$  und  $x_2$  ein, so folgt  $x - x_1 > 0$  und  $x - x_2 < 0$ ; das Produkt  $(x - x_1)(x - x_2)$  als Produkt zweier Faktoren mit ungleichen Vorzeichen ist negativ.

Für positiven ersten Koeffizienten  $a$  ist der Funktionswert negativ, ist dagegen  $a < 0$ , so ist er positiv. In beiden Fällen ist das Vorzeichen des ersten Koeffizienten  $a$  entgegengesetzt.

c) Für  $x > x_2$  ist  $x - x_2 > 0$  und auch  $x - x_1 > 0$ ; das Produkt  $(x - x_1)(x - x_2)$  ist damit größer als null. Das Vorzeichen von  $y$  stimmt dann, wie auch im Falle a), mit dem Vorzeichen des ersten Koeffizienten überein.

Die Abbildungen 18 und 19 veranschaulichen die hier behandelten Fälle.

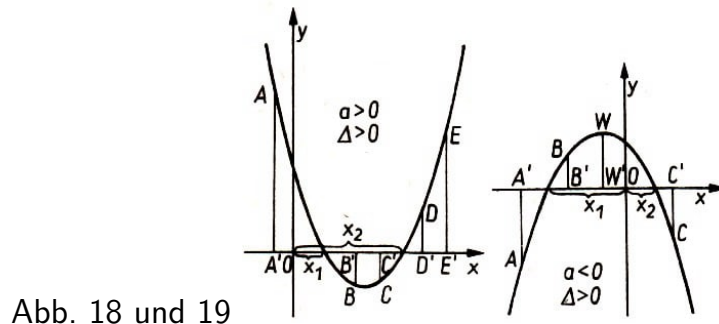


Abb. 18 und 19

Satz 3. Ist die Diskriminante positiv ( $\Delta > 0$ ), so ist das Vorzeichen der Werte der quadratischen Funktion

- a) gleich dem Vorzeichen des ersten Koeffizienten  $a$  für  $x < x_1$  und  $x > x_2$ ,
- b) entgegengesetzt zum Vorzeichen des ersten Koeffizienten  $a$  für  $x_1 < x < x_2$ .
- c) Für  $x = x_1$  und  $x = x_2$  ist  $y = 0$ .

Beispiel. Es ist das Vorzeichen von

$$y = x^2 - x - 12$$

zu untersuchen. Die Diskriminante ist  $\Delta = 49 = 7^2 > 0$ . Wir berechnen die Nullstellen der Funktion und erhalten  $x_1 = -3$ ;  $x_2 = 4$ .

Für  $x < -3$  und  $x > 4$  haben die Funktionswerte das gleiche Vorzeichen wie der erste Koeffizient  $a = 1 > 0$ ; sie sind dort demnach positiv. Für  $-3 < x < 4$  haben sie das entgegengesetzte Vorzeichen wie  $a$ , demnach sind sie negativ. Für  $x = -3$  und  $x = 4$  gilt  $y = 0$ .

Die drei angegebenen Sätze kann man zu einem Satz zusammenfassen.

Satz (über das Vorzeichen der Werte einer quadratischen Funktion).

Das Vorzeichen der Werte einer quadratischen Funktion ist gleich dem Vorzeichen des ersten Koeffizienten mit Ausnahme des Falls, dass die Funktion Wurzeln  $x_1$  und  $x_2$  besitzt und  $x$  im Intervall zwischen den Wurzeln liegt ( $x_1 < x < x_2$ ). Dort ist das Vorzeichen entgegengesetzt zu dem von  $a$ .

## Übungen

33. Es sind jeweils die Vorzeichen der Funktionswerte von

- a)  $y = -4x^2 + 6x - 7$ ,   b)  $y = x^2 - 15x + 14$ ,   c)  $y = -2x^2 + 200$  zu untersuchen!

34. Für welche Werte von  $x$  ist  $y = x^2 - 9x - 10$  negativ?

35. Für welche Werte von  $x$  ist  $y = -4x^2 + x - 1$  positiv?

36. Es sind die ganzzahligen Werte  $x$  zu bestimmen, für die  $y = x^2 - x - 6$  negativ ist!



37. Gegeben ist die quadratische Funktion  $y = x^2 - x + 41$ . Für  $x$  sind die natürlichen Zahlen  $x = 1, 2$  bis 40 einzusetzen und die entsprechenden Funktionswerte  $y$  zu berechnen.

Welche Zahlen ergeben sich dabei? Wieviele Teiler hat jede dieser Zahlen?

38. Der Mathematiker Adrien Marie Legendre (1752-1833) hat den Ausdruck  $2x^2 + 29$  angegeben, der interessante Eigenschaften zeigt, wenn für  $x$  die natürlichen Zahlen  $x = 1$  bis  $x = 28$  eingesetzt werden.

Welche Zahlen erhält man?

## 14 Quadratische Ungleichungen

Ungleichungen zweiten Grades (quadratische Ungleichungen) nennen wir Ausdrücke der Form

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad , \quad ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (1)$$

sowie

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad , \quad ax^2 + bx + c \leq 0 \quad (2)$$

Eine Ungleichung lösen bedeutet, die Menge der Werte  $x$  zu finden, die die Ungleichung erfüllen, oder nachzuweisen, dass solche Werte nicht existieren.

Die Lösung von Ungleichungen zweiten Grades lehnt sich an die Sätze über das Vorzeichen quadratischer Funktionen an, die wir bereits behandelt haben.

Beispiel 1. Es ist die Ungleichung zu lösen:

$$4x^2 - 7x + 5 > 0 \quad (3)$$

Zuerst stellen wir das Vorzeichen der Diskriminante fest:  $\Delta = b^2 - 4ac = -31$ . Da  $\Delta < 0$  ist, folgt aus Satz 1, dass das Vorzeichen des quadratischen Ausdrucks  $4x^2 - 7x + 5$  auf der linken Seite der Ungleichung (3) für alle Werte  $x$  mit dem Vorzeichen des ersten Koeffizienten  $a = 4 > 0$  übereinstimmt.

Damit ist die Ungleichung (3) für alle  $x$  erfüllt. Lösungsmenge ist also die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen.

Beispiel 2. Es ist die Ungleichung

$$-x^2 + 3x + 10 > 0 \quad (4)$$

zu lösen. Die Diskriminante ist  $\Delta = 49 > 0$ . Wir berechnen die Wurzeln  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 5$ . Das Vorzeichen des Koeffizienten  $a = -1$  ist negativ, wir fordern aber, dass das Vorzeichen des quadratischen Trinoms  $-x^2 + 3x + 10$  positiv ist, d.h., wir fordern, dass das Vorzeichen des Trinoms dem Vorzeichen des ersten Koeffizienten  $a$  entgegengesetzt ist.

Nach dem Satz 3(b) schließen wir, dass diese Forderung für alle Werte zwischen den Nullstellen erfüllt ist, d.h. für  $-2 < x < 5$ . So erhalten wir z.B. für  $x = 3$   $f(3) = 10 > 0$ . Für  $x = -4$  dagegen ist  $f(-4) = -18 < 0$ .

Wir haben einen negativen Wert des Trinoms natürlich deshalb erhalten, weil die Zahl  $-4$  die Ungleichung  $-2 < x < 5$  nicht erfüllt.

Beispiel 3. Die Ungleichung

$$3x^2 - 8x + 10 < 0 \quad (5)$$

ist zu lösen. Die Diskriminante ist  $\Delta = -56 < 0$ , das Trinom behält also das Vorzeichen des ersten Koeffizienten  $a = 3 > 0$ , d.h.,  $3x^2 - 8x + 10$  ist für alle Werte  $x$  positiv.

Die in der Ungleichung (5) ausgedrückte Forderung, dass das Trinom negativ sein soll, ist für keinen Wert  $x$  erfüllbar. Eine solche Ungleichung nennen wir nicht lösbar, und die Lösungsmenge ist leer.

Beispiel 4. Die Ungleichung

$$-9x^2 + 12x - 4 < 0 \quad (6)$$

soll gelöst werden. Die Diskriminante ist  $\Delta = 0$ . Das Vorzeichen des Ausdrucks stimmt also mit dem Vorzeichen des ersten Koeffizienten  $a = -9 < 0$  überein, d.h., das Trinom ist für alle Werte  $x$  negativ mit Ausnahme von  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{3}$  (in diesem Falle ist die linke Seite der Ungleichung (6) gleich null). Demnach ist die Lösungsmenge  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$ .

Zum Schluss wollen wir noch folgende Aufgabe lösen.

Aufgabe. Auf die Frage, wie alt er sei, antwortet ein Schüler wie folgt: "Wenn man die Zahl der Jahre, die ich vollendet habe, mit der um 32 kleineren Zahl multipliziert und dazu 255 addiert, so bekommt man eine negative Zahl."

Kann man mit Hilfe dieser Aussage das Alter des Schülers bestimmen?

Wir bezeichnen die Zahl der Jahre mit  $x$ , die um 32 kleinere Zahl ist dann  $(x - 32)$ , und das Produkt lautet  $x(x - 32)$ .

Entsprechend der Aufgabenstellung soll nun die Ungleichung

$$x(x - 32) + 255 < 0 \quad (7)$$

erfüllt sein oder nach Vereinfachung  $x^2 - 32x + 255 < 0$ .

Die Diskriminante ist  $\Delta = 4 > 0$ . Wir berechnen die Lösungen:  $x_1 = 15$ ;  $x_2 = 17$ . Da der Koeffizient  $a = 1 > 0$  ist und das Trinom negativ sein soll, kann  $x$  nur die Werte zwischen den Lösungen annehmen. Die durch den Schüler gestellte Bedingung (7) ist durch die Zahlen  $x$  zwischen 15 und 17 erfüllt, d.h., es muss  $15 < x < 17$  sein.

Weil das Alter aber ganzzahlig sein muss, erfüllt nur die Zahl 16 diese Bedingung. Der Schüler hat folglich das 16. Lebensjahr vollendet.

## Übungen

39. Es sind die Ungleichungen a)  $2x^2 + 15x + 13 > 0$ , b)  $-x^2 + 18x - 81 < 0$ , c)  $5x^2 - x - 4 < 0$ , d)  $x^2 - 9 > 0$ , e)  $x^2 + 4x < 0$  zu lösen!

40. Für welche Werte von  $x$  sind die quadratischen Trinome positiv?

a)  $x^2 - 6x + 8$ , b)  $-x^2 + x + 12$ , c)  $-2x^2 + x - 4$ , d)  $4x^2 - 4x + 1$ .

41. Für welche ganzzahligen Werte von  $x$  sind die nachfolgenden Ungleichungen erfüllt?

a)  $x^2 - 10x + 21 > 0$ , b)  $-x^2 + 1 > 0$ , c)  $x^2 - x + 3 > 0$ , d)  $-x^2 + 5x - 6 < 0$ , e)  $x^2 - 9x + 20 < 0$ .

42. Für welche Werte des Parameters  $m$  hat die Gleichung  $x^2 - mx + 1 = 0$  eine Doppellösung? Wie lautet diese?

43. Für welche Werte des Parameters  $m$  hat die Gleichung  $x^2 + 2mx + 16 = 0$  zwei unterschiedliche Lösungen?

44. Es ist zu beweisen, dass die Gleichung  $x^2 - 2mx + (m - 1) = 0$  für beliebige Werte  $m$  zwei ungleiche Lösungen hat. Es sind die Lösungen für  $m = 0$  und  $m = 1$  zu berechnen!

45. Zwei Jungen kauften wöchentlich je ein Exemplar einer Zeitschrift. Da sie nicht gleichzeitig mit dem Kauf der Zeitschrift angefangen hatten, besaß jeder von ihnen eine andere Anzahl von Exemplaren.

Der ältere sagte: "Die Anzahl meiner Hefte erfüllt die Ungleichung  $x^2 - 62x + 960 < 0$ ", der jüngere antwortete ihm: "Die Anzahl meiner Exemplare ist gleich einer der Lösungen der Gleichung  $x^2 - 34x - 35 = 0$ ."

Kann man auf Grund dieser beiden Aussagen die genaue Zahl der Exemplare bestimmen, die jeder der Jungen besaß?

## 15 Gleichungssysteme. Wie wurde ein Gleichungssystem vor viertausend Jahren gelöst?

Befassen wir uns nun mit Systemen zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten, wobei mindestens eine der Gleichungen zweiten Grades ist.

Beispiel 1. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 29 \quad , \quad 2x - y + 1 = 0 \quad (1)$$

Die erste Gleichung ist zweiten Grades sowohl bezüglich der Unbekannten  $x$  als auch bezüglich der Unbekannten  $y$ . Die zweite Gleichung ist ersten Grades.

Ein derartiges Gleichungssystem lösen wir folgendermaßen: mit Hilfe der Gleichung ersten Grades drücken wir eine der Unbekannten durch die andere aus und setzen sie in die zweite Gleichung ein. Im allgemeinen erhalten wir damit eine Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten, die wir ja bereits lösen können.

Wenden wir nun diese Methode zur Lösung des gegebenen Systems an und lösen die Gleichung ersten Grades nach  $y$  auf. Das ist leichter als die Auflösung nach  $x$ , denn wir vermeiden dadurch die Division durch zwei:

$$y = 2x + 1 \quad (2)$$

Den erhaltenen Wert setzen wir in die Gleichung zweiten Grades

$$x^2 + (2x + 1)^2 = 29$$

ein, wir quadrieren  $x^2 + 4x^2 + 4x + 1 = 29$ , und daraus folgt  $5x^2 + 4x - 28 = 0$ .

Wir berechnen  $\frac{1}{4}\Delta = 144 = 12^2$ . Wenden wir nun die Formel (17) an, so erhalten wir

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 12}{5}$$

und finden zwei Lösungen  $x_1 = -\frac{14}{5}$ ,  $x_2 = 2$ . Um die zugehörigen  $y$ -Werte zu erhalten, setzen wir in Gleichung (2) zunächst den Wert  $x_1 = -\frac{14}{5}$  ein und erhalten

$$y_1 = 2\left(-\frac{14}{5}\right) + 1 = -\frac{23}{5}$$

anschließend den Wert  $x_2 = 2$  mit  $y_2 = 5$ .

Fassen wir die zusammengehörigen Werte  $x$  und  $y$  zu einem Paar zusammen, so erhalten wir schließlich die beiden Lösungen des Systems (2):

$$x_1 = -\frac{14}{5}, \quad y_1 = -\frac{23}{5} \quad ; \quad x_2 = 2, \quad y_2 = 5$$

Beispiel 2. Es ist interessant, dass wir Gleichungssystemen schon in dem sogenannten Berliner Papyrus begegnen, der etwa aus der gleichen Zeit stammt wie der Moskauer Papyrus und der Papyrus des Ahmes. Dort findet man ein Problem, das auf das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 100 \quad , \quad x : y = 1 : \frac{3}{4} \quad (3)$$

führt, wobei folgender Lösungsweg angegeben wird: Wir probieren, setzen in die erste Gleichung die Werte  $x = 1$ ;  $y = \frac{3}{4}$  ein und erhalten

$$1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

Anschließend berechnen wir die Quadratwurzeln von  $\frac{25}{16}$  und 100

$$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} \quad ; \quad \sqrt{100} = 10$$

Da nun  $\frac{5}{4}$  in 10:  $10 : \frac{5}{4} = 8$  mal enthalten ist, müssen die Werte, mit denen wir die Probe durchgeführt haben, um das 8fache vergrößert werden, d.h.

$$x = 8 \cdot 1 = 8 \quad ; \quad y = 8 \cdot \frac{3}{4} = 6$$

### Übung

46. Es ist das Gleichungssystem (3) mit der Methode zu lösen, die bei der Lösung des ersten Gleichungssystems angewandt wurde, und es ist zu überprüfen, ob es ebenfalls mehrere Lösungen besitzt!

Beispiel 3.

$$x^2 - xy - 6y^2 + 2y + 50 = 0 \quad , \quad x + 2y - 7 = 0 \quad (4)$$

Die Gleichung ersten Grades, d.h. die zweite Gleichung des Systems, lösen wir nach  $x$  auf

$$x = 7 - 2y \quad (5)$$

und setzen den Ausdruck für  $x$  in die erste Gleichung ein

$$(7 - 2y)^2 - (7 - 2y)y - 6y^2 + 2y + 50 = 0$$

Wir quadrieren, multiplizieren aus

$$49 - 28y + 4y^2 - 7y + 2y^2 - 6y^2 + 2y + 50 = 0$$

$$33y + 99 = 0$$

und erhalten  $y = 3$ . Den erhaltenen Wert für die Unbekannte  $y$  setzen wir in die Gleichung (5) ein, und es folgt  $x = 1$ .

Es gibt also genau eine Lösung des Systems (4):  $x = 1$ ;  $y = 3$ .

Beispiel 4. Es ist das Gleichungssystem

$$10x^2 - 21xy + 9y^2 - 3x = 1 \quad , \quad 2x - 3y = 1 \quad (6)$$

zu lösen. Die zweite Gleichung lösen wir nach  $x$  auf

$$x = \frac{3y + 1}{2}$$

und setzen diesen Wert in die erste Gleichung ein:

$$10 \cdot \frac{9y^2 + y + 1}{4} - 21y \cdot \frac{3y + 1}{2} + 9y^2 - 3 \cdot \frac{3y + 1}{2} = 1$$

Im ersten Bruch kürzen wir 10 gegen 4, alle Brüche haben nun den gleichen Nenner 2. Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit 2 und führen die übrigen Multiplikationen aus, so erhalten wir eine Gleichung ohne Brüche

$$45y^2 + 30y + 5 - 63y^2 - 21y + 18y^2 - 9y - 3 = 2$$

Passen wir zusammen, so ergibt sich die Identität  $2 = 2$ , d.h., wir haben die erwartete Auflösung nach  $y$  nicht erhalten.

Wie ist dieses Ergebnis zu deuten? Hat denn das Gleichungssystem (6) Lösungen oder hat es keine?

Wir wählen für  $x$  einen beliebigen Wert, z.B. 5, setzen diesen in die Gleichung ersten Grades ein, berechnen den entsprechenden Wert  $y$

$$2 \cdot 5 - 3y = 1 \quad ; \quad 10 - 3y = 1$$

und erhalten daraus  $y = 3$ .

Das Wertepaar  $x = 5$  und  $y = 3$  erfüllt natürlich die Gleichung ersten Grades. Setzen wir diese Werte in die Gleichung zweiten Grades (d.h. in die erste Gleichung) ein, so erhalten wir, wie die durchgeführte Rechnung zeigt, die Identität  $2 = 2$ .

Das bedeutet aber, dass auch die Gleichung zweiten Grades erfüllt ist. Das Wertepaar  $x = 5$ ;  $y = 3$  ist also eine Lösung des Systems (6).

So wird es bei diesem System immer sein: wählen wir für eine Unbekannte eine beliebige Zahl und berechnen die zweite Unbekannte mit Hilfe der Gleichung ersten Grades, so erfüllen diese Werte auch die Gleichung zweiten Grades. Das System (6) besitzt so viele Lösungen wie es Möglichkeiten der Wahl einer der Unbekannten gibt, es besitzt also unbegrenzt viele (man sagt auch: unendlich viele) Lösungen.

Wählen wir für  $x$  z.B. die Werte  $-3, 0, 4, 7, 12\frac{1}{2}, \dots$ , so erhalten wir folgende Lösungen des Systems (6):

$$\begin{array}{ccccc} x = -3 & x = 0 & x = 4 & x = 7 & x = 12\frac{1}{2} \\ y = -2\frac{1}{3} & y = -\frac{1}{3} & y = 2\frac{1}{3} & y = 4\frac{1}{3} & y = 8 \dots \end{array}$$

Ein System mit unendlich vielen Lösungen nennen wir ein unterbestimmtes System.

Beispiel 5. Es ist das Gleichungssystem

$$x^2 - 5xy + 6y^2 + 3y = 15 \quad , \quad x - 2y = 3 \quad (7)$$

zu lösen. Die zweite Gleichung lösen wir nach der Unbekannten  $x$  auf

$$x = 2y + 3$$

und setzen diesen Wert in die erste Gleichung ein

$$(2y + 3)^2 - 5y(2y + 3) + 6y^2 + 3y = 15$$

Wir führen die Rechenoperationen

$$4y^2 + 12y + 9 - 10y^2 - 15y + 6y^2 + 3y = 15$$

durch und erhalten  $9 = 15$ .

Statt der erwarteten Auflösung nach der Unbekannten  $y$  sind wir auf einen Widerspruch gestoßen. Wählen wir einen beliebigen Wert für eine Variable, z.B.  $x = 1$ , berechnen mit Hilfe der Gleichung ersten Grades den entsprechenden Wert  $y = -1$  und setzen schließlich diese Zahlen für  $x$  und  $y$  in die Gleichung zweiten Grades ein, so wird diese niemals erfüllt:

Wir erhalten immer eine widersprüchliche Gleichung. Das Gleichungssystem (7) hat keine Lösung. Ein solches Gleichungssystem heißt widersprüchliche; (nicht lösbares) Gleichungssystem. Die Lösungsmenge ist leer.

Alle bisher betrachteten Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten enthielten eine Gleichung zweiten Grades und eine weitere Gleichung ersten Grades. Bei ihrer Lösung sind wir auf Systeme mit unterschiedlichen Anzahlen von Lösungen gestoßen, aber auch auf Systeme ohne Lösungen. Stellen wir die einzelnen Fälle zusammen, denen wir begegnet sind:

Ein System zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten, von denen eine zweiten Grades, die andere ersten Grades ist, kann

1. zwei Lösungen haben (bestimmtes Gleichungssystem),
2. eine Lösung haben (bestimmtes Gleichungssystem),
3. unendlich viele Lösungen haben (unterbestimmtes Gleichungssystem),
4. überhaupt keine Lösungen haben (widersprüchliches Gleichungssystem).

Im letzten Falle ist die Lösungsmenge leer.

Zum Abschluss dieser Betrachtungen wollen wir als Beispiel auch noch ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen zweiten Grades lösen.

Beispiel 6.

$$x^2 - 3x - y^2 + y = 8 \quad , \quad x^2 - y^2 = 21 \quad (8)$$

Beide Gleichungen enthalten sowohl  $x^2$  als auch  $y^2$ .

Wir vergleichen die Ausdrücke zweiten Grades in beiden Gleichungen: die erste Gleichung enthält die quadratischen Glieder  $x^2 - y$ , in der zweiten Gleichung tritt diese Differenz  $x^2 - y^2$  gleichfalls auf.

Wenn wir also eine Gleichung von der anderen subtrahieren, so heben sich diese Differenzen auf, und wir erhalten eine Gleichung ersten Grades. Führen wir diese Subtraktion aus, so bleibt

$$-3x + y = 8 - 21$$



Diese Gleichung lösen wir nach  $y$  auf (denn das ist einfacher)

$$y = 3x - 13 \quad (9)$$

und setzen diesen Wert in die zweite Gleichung des Systems (8) ein

$$x^2 - (3x - 13)^2 = 21$$

Wir quadrieren

$$x^2 - (9x^2 - 78x + 169) = 21$$

lösen die Klammer auf und subtrahieren 21

$$x^2 - 9x^2 + 78x - 169 - 21 = 0 \quad , \quad -8x^2 + 78x - 190 = 0$$

Nun teilen wir beide Seiten durch  $-2$  und erhalten schließlich

$$4x^2 - 39x + 95 = 0$$

Wir berechnen  $\Delta = 1$  und erhalten  $x_1 = \frac{19}{4}$ ,  $x_2 = 5$ .

Setzen wir diese Werte in Gleichung (9) ein, so erhalten wir die zugehörigen Werte  $y_1 = \frac{5}{4}$ ,  $y_2 = 2$ .

Wir stellen die erhaltenen Wertepaare zusammen; das System (8) hat die beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{19}{4}, \quad y_1 = \frac{5}{4} \quad ; \quad x_2 = 5, \quad y_2 = 2$$

## Übungen

Es sind die folgenden Gleichungssysteme zu lösen!

47.  $xy = 12$ ;  $x + y = 8$ .

48.  $xy = 48$ ;  $3x - 2y = 12$ .

49.  $x^2 + y^2 = 16$ ;  $x + y = 4$ .

50.  $x^2 + y^2 = 36$ ;  $x : y = 3 : 4$ .

51.  $(x - 1)(y - 2) = 26$ ;  $x - y = 10$ .

52.  $x + y = 17$ ;  $xy = 30$ .

53.  $x^2 + xy + y^2 = 10$ ;  $x - y = 2$ .

54.  $xy = 48$ ;  $x + y = 48$ .

55.  $9x^2 - 16y^2 = 24$ ;  $3x - 4y = 12$ .

56.  $x^2 - y^2 = 27$ ;  $x - y = 3$ .

57.  $y^2 + 3xy - 2y - 5 = 0$ ;  $3x + y = 2$ .

58.  $x^2 + xy + y^2 = 91$ ;  $x + y = 11$ .

59.  $12x^2 + 12y^2 = 25xy$ ;  $2x + y = 10$ .

60.  $(x - 2)(y - 4) = 1$ ;  $(x - 2) : (y - 4) = 1$ .

61.  $2x^2 + xy - 5x - y + 3 = 0$ ;  $2x + y = 3$ .

62.  $x^2 + xy = 12$ ;  $y^2 + xy = 4$ .

63.  $3x^2 + 4y^2 = 247$ ;  $3x^2 - 4y^2 = 47$ .

64.  $x^2 - y^2 = 12$ ;  $x^2 + 2y = 27$ .

65.  $x^2 - 2xy - 3y^2 + x + 2y + 2 = 0$ ;  $3x + 5y + 4 = 0$ .

## 16 Wir lösen Anwendungsaufgaben mit zwei Unbekannten

Ist man in der Lage, Gleichungssysteme zu lösen, so kann man auch komplizierte Probleme lösen, die mehr als eine Unbekannte enthalten. Hier zunächst einige Aufgaben, deren Lösungen wir angeben.

Aufgabe 1. Es sind zwei Zahlen zu finden, deren Summe 11 und deren Produkt 18 ist.

Wir bezeichnen eine der unbekannten Zahlen mit  $y$ , die andere mit  $z$ . Damit erhalten wir aus der Aufgabenstellung folgendes Gleichungssystem :

$$y + z = 11 \quad , \quad yz = 18 \quad (1)$$

Diese Gleichungen erinnern an die uns bekannten Gleichungen von Viète über die Summe und das Produkt der Lösungen quadratischer Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0 \quad (2)$$

wobei

$$x_1 + x_2 = -p \quad ; \quad x_1 \cdot x_2 = q \quad (3)$$

war. Wir bestimmen also die quadratische Gleichung in der Form (2), deren Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  die gesuchten Zahlen  $y$  und  $z$  sind. Entsprechend (3) erhalten wir

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

mit den Lösungen  $x_1 = 2$  und  $x_2 = 9$ . Da nun diese Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  die gesuchten Unbekannten sind, ist  $z = x_1$ ;  $y = x_2$  oder  $z = x_2$ ;  $y = x_1$ .

Das System (1) besitzt demnach die beiden Lösungen

$$y_1 = 2, \quad z_1 = 9 \quad ; \quad y_2 = 9, \quad z_2 = 2$$

Zu dem gleichen Ergebnis wären wir natürlich auch gekommen, hätten wir zunächst aus der ersten Gleichung eine der beiden Unbekannten bestimmt (z.B.  $z = 11 - y$ ) und diesen Wert in die zweite Gleichung eingesetzt

$$(11 - y)y = 18$$

oder geordnet

$$y^2 - 11y + 18 = 0$$

woraus  $y_1 = 2$ ;  $y_2 = 9$  folgen. Die Gleichung  $z = 11 - y$  ergibt dann die entsprechenden Werte der anderen Unbekannten:  $z_1 = 9$ ;  $z_2 = 2$ .

Aufgabe 2. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse 41 m lang. Wenn man beide Katheten um 5 m verkürzt, so vermindert sich die Fläche des Dreiecks um 110 m<sup>2</sup>. Es ist die Länge der Katheten zu berechnen!

Wir nennen die Länge der Katheten (in m)  $x$  und  $y$ . Da die Länge der Hypotenuse 41 m beträgt, erhalten wir nach dem Lehrsatz des Pythagoras die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 41^2 \quad (4)$$

Die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem halben Produkt der Katheten

$$\frac{xy}{2} \quad (5)$$

Verkürzen wir jede der Katheten um 5 m, so erhalten wir ein Dreieck mit den Katheten  $(x - 5)$  m und  $(y - 5)$  m. Die Fläche dieses neuen Dreiecks beträgt (in  $\text{m}^2$ )

$$\frac{(x - 5)(y - 5)}{2} \quad (6)$$

und soll um  $110 \text{ m}^2$  kleiner als die Fläche (5) des ursprünglichen Dreiecks sein. Subtrahieren wir also 110 vom Ausdruck (5), so erhalten wir - entsprechend der Aufgabenstellung - den Zahlenwert von (6)

$$\frac{xy}{2} - 110 = \frac{(x - 5)(y - 5)}{2} \quad (7)$$

Zur Berechnung der beiden unbekannten Katheten stehen uns die Gleichungen (4) und (7) zur Verfügung. Wir vereinfachen (7), indem wir beide Seiten mit 2 multiplizieren und die Klammer ausmultiplizieren. Es folgt

$$xy - 220 = xy - 5x - 5y + 25 \quad \text{oder} \quad 5x + 5y = 245$$

Schließlich werden beide Seiten durch 5 dividiert

$$x + y = 49$$

Das System der Gleichungen (4) und (7) hat jetzt die Form

$$x^2 + y^2 = 41^2, \quad x + y = 49 \quad (8)$$

Wir lösen die zweite Gleichung z.B. nach der Unbekannten  $y$  auf

$$y = 49 - x \quad (9)$$

und setzen diesen Wert in die erste Gleichung ein

$$x^2 + (49 - x)^2 = 41^2, \quad x^2 + 2401 - 98x + x^2 = 1681$$

Wir fassen zusammen und teilen durch 2

$$x^2 - 49x + 360 = 0$$

Das Produkt der Lösungen ist 360, die Summe 49; wir finden die Lösungen dieser Gleichung leicht:  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = 40$ .

Mit Gleichung (9) berechnen wir die entsprechenden  $y$ -Werte  $y_1 = 40$ ,  $y_2 = 9$ .  
Auf diesem Wege haben wir zwei Lösungen des Systems (8) erhalten oder - was auf das gleiche hinausläuft - zwei Lösungen des Systems der Gleichungen (4) und (7):

$$x_1 = 9, \quad y_1 = 40 \quad ; \quad x_2 = 40, \quad y = 9$$

Eine Kathete ist demnach 9 m lang, die andere 40 m.

Aufgabe 3. Ein Kaufmann hat 2 Fässer Wein, deren Inhalt sich verhält wie 5 : 4. Ein Liter Wein des ersten Fasses kostet so viel Złoty wie die halbe Menge Wein in Litern in diesem Fass beträgt.

Ein Liter Wein des zweiten Fasses ist 25 Złoty billiger als ein Liter Wein des ersten Fasses. Der Gesamtpreis des Weines beider Fässer beträgt 43010 Złoty.

Wieviel Wein ist in jedem Fass, und wieviel Złoty kostet 1 Liter Wein aus jedem Fass?

Wir haben hier scheinbar vier Unbekannte, denn wir wissen weder, wieviel Wein in jedem Fass ist, noch wissen wir, wieviel 1 Liter Wein jeder Sorte kostet. Es genügt aber, nur 2 Unbekannte folgendermaßen einzuführen:

den Inhalt des 1. Fasses (in Litern) nennen wir  $x$ ,  
den Inhalt des 2. Fasses (in Litern) nennen wir  $y$ .

Entsprechend der ersten Forderung der Aufgabe erhalten wir die Gleichung

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{4} \tag{10}$$

Aus der Aufgabenstellung folgt weiterhin, dass 1 Liter des 1. Fasses  $\frac{x}{2}$  Złoty, 1 Liter des 2. Fasses  $\left(\frac{x}{2} - 25\right)$  Złoty kostet. (11)

Das 1. Fass enthält  $x$  Liter zu je  $\frac{x}{2}$  Złoty pro Liter; der Wein des 1. Fasses kostet demnach  $x \cdot \frac{x}{2}$  Złoty. (12)

Das 2. Fass enthält  $y$  Liter zu je  $\left(\frac{x}{2} - 25\right)$  Złoty pro Liter; der Wein des 2. Fasses kostet demnach  $y \left(\frac{x}{2} - 25\right)$  Złoty. (13)

Der Preis des Weines beider Fässer beträgt aber 43010 Złoty. Addieren wir (12) und (13), so erhalten wir

$$x \cdot \frac{x}{2} + y \left(\frac{x}{2} - 25\right) = 43010 \tag{14}$$

Die Gleichungen (10) und (14) stellen das zu lösende System dar. Mit Hilfe der ersten Gleichung bestimmen wir

$$y = \frac{4x}{5} \tag{15}$$

und setzen diesen Wert in (14) ein

$$\frac{x^2}{2} + \frac{4x}{5} \left(\frac{x}{2} - 25\right) = 43010$$

Um die Brüche zu beseitigen, multiplizieren wir beide Seiten mit 10

$$5x^2 + 4x^2 - 200x = 430100$$

und erhalten

$$9x^2 - 200x - 430100 = 0$$

Hier ist  $\frac{1}{4}\Delta = 3880900 = 1970^2$ . Wir erhalten folglich

$$x_1 = -\frac{1870}{9} < 0 \quad , \quad x_2 = \frac{2070}{9} = 230$$

Der negative Wert ist keine Lösung unserer Aufgabe. Das erste Fass enthält demnach 230 Liter. Mit Hilfe der Gleichung (15) bestimmen wir den Inhalt des zweiten Fasses

$$y = \frac{4 \cdot 230}{5} = 184$$

Das 2. Fass enthält folglich 184 Liter. Um den Preis eines Liter Weines jeder Sorte zu berechnen, beachten wir (11) und erhalten:

1 Liter Wein des 1. Fasses kostet 115 Złoty,

1 Liter Wein des 2. Fasses kostet 90 Złoty.

### Übungen

66. Das Produkt zweier Zahlen ist 14, die Summe ihrer Quadrate ist 53. Wie lauten diese Zahlen?

67. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist 325, das Verhältnis der Zahlen ist 3 : 2. Um welche Zahlen handelt es sich?

68. Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist doppelt so groß wie ihre Summe. Das Produkt der Zahlen ist 35. Die Zahlen sind zu berechnen!

69. Auf einer Strecke von 800 m macht das Vorderrad eines Wagens 80 Umdrehungen mehr als das Hinterrad. Vergrößert man den Umfang des Vorderrades um 0,5 m und den Umfang des Hinterrades um 1,5 m, so muss das Vorderrad auf der gleichen Strecke 120 Umdrehungen mehr machen als das Hinterrad.

Es sind die Umfänge der Räder zu bestimmen!

70. Die Hypotenuse eines Dreiecks ist 20 cm lang. Wenn man eine Kathete um 5 cm verkürzt, die andere um 4 cm verlängert, dann verkleinert sich die Fläche des Dreiecks um 26 cm<sup>2</sup>. Es sind die Längen der Katheten zu bestimmen!

## 17 Irrationale Gleichungen

Von irrationalen Gleichungen (manchmal auch Wurzelgleichungen) sprechen wir, wenn die Unbekannte in der Gleichung unter dem Wurzelzeichen auftritt.

Zunächst einige Beispiele für irrationale Gleichungen:

$$\sqrt{5} = 5, \quad 2x - 1 = \sqrt{7x + 4}, \quad \sqrt{2x - 4} + 6 = x \quad (1,2,3)$$

Man muss aber beachten, dass die Gleichung

$$x\sqrt{3} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = x$$

keine irrationale Gleichung ist, denn die Unbekannte  $x$  tritt nicht unter dem Wurzelzeichen auf. Diese Gleichung ist eine einfache Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten.

Die erste der oben angeführten Gleichungen

$$\sqrt{x} = 5$$

lösen wir, indem wir beide Seiten der Gleichung quadrieren  $x = 25$ .

Der Wert  $x = 25$  erfüllt die Gleichung (1), denn  $\sqrt{25} = 5$ ;  $x = 25$  ist demnach die Lösung dieser Gleichung.

Bei dieser Gelegenheit erinnern wir daran, dass die Gleichung

$$\sqrt{x} = -5 \quad (4)$$

keine Lösung hat, obwohl man nach dem Quadrieren beider Seiten ebenfalls  $x = 25$  erhalten würde. Setzen wir diesen Wert nämlich in Gleichung (4) ein, so erhalten wir

$$\sqrt{25} = -5$$

was falsch ist, denn rechts vom Gleichheitszeichen steht eine negative, links dagegen eine positive Zahl ( $\sqrt{25}$  bezeichnet - wie wir wissen - nur die Zahl +5).

Nun lösen wir die Gleichung (2).

$$2x - 1 = \sqrt{7x + 4}$$

Wieder quadrieren wir beide Seiten

$$(2x - 1)^2 = 7x + 4 \quad (5)$$

und erhalten nach dem Ausmultiplizieren

$$4x^2 - 4x + 1 = 7x + 4$$

Das fassen wir zusammen und erhalten eine quadratische Gleichung

$$4x^2 - 11x - 3 = 0$$

mit den Lösungen  $x_1 = -\frac{1}{4}$ ;  $x_2 = 3$ .

Nur diese beiden Zahlen kommen als Lösungen der Gleichung (2) überhaupt in Frage. Wenn nämlich eine bestimmte Zahl  $x$  die Gleichung (2) erfüllt, dann erfüllt sie auch die Gleichung  $4x^2 - 11x - 3 = 0$ , die Umkehrung jedoch gilt nicht notwendig.

Um uns davon zu überzeugen, ob die beiden Zahlen Lösungen der Gleichung (2) sind, setzen wir sie in Gleichung (2) ein.

Zunächst setzen wir  $x = -\frac{1}{4}$  in die linke Seite (L) der Gleichung (2) ein

$$L = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

und anschließend in die rechte Seite (R)

$$R = \sqrt{7 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 4} = \sqrt{-\frac{7}{4} + 4} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

Die linke Seite der Gleichung (2) ist also für  $x = -\frac{1}{4}$  nicht gleich der rechten Seite, d.h., der Wert  $x = -\frac{1}{4}$ , ist nicht Lösung von (2).

Um zu überprüfen, ob  $x = 3$  eine Lösung der Gleichung (2) ist, verfahren wir analog. Durch Einsetzen in die linke Seite erhalten wir  $L = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ , und durch Einsetzen in die rechte Seite  $R = \sqrt{7 \cdot 3 + 4} = 5$ .

Jetzt ist  $L = R$ , und das bedeutet, dass  $x = 3$  eine Lösung der Gleichung (2) ist. Wir stellen abschließend fest, dass die Gleichung

$$2x - 1 = \sqrt{7x + 4}$$

genau eine Lösung  $x = 3$  besitzt, und wir sagen in diesem Falle, dass die Lösungsmenge einelementig ist.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass  $x = -\frac{1}{4}$  eine Lösung der Gleichung

$$2x - 1 = -\sqrt{7x + 4}$$

ist, hingegen  $x = 3$  nicht.

Wir lösen jetzt die Gleichung

$$\sqrt{21 - 5x} + x = 5$$

Das Quadrieren beider Seiten der Gleichung führt nicht auf eine rationale Gleichung, denn das doppelte Produkt der Glieder  $\sqrt{21 - 5x}$  und  $x$  auf der linken Seite der Gleichung ist nicht rational. Wenn wir allerdings  $-x$  zuvor auf beiden Seiten addieren, so isolieren wir den irrationalen Ausdruck (man spricht auch vom Isolieren der Wurzel) und erhalten

$$\sqrt{21 - 5x} = 5 - x \tag{6}$$

Wir quadrieren

$$21 - 5x = 25 - 10x + x^2$$

und geordnet folgt daraus

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Diese Gleichung hat die Lösungen  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 4$ . Nun überprüfen wir, ob diese Werte Lösungen der Ausgangsgleichung (6) sind.

Für  $x = 1$  ist  $L = \sqrt{21 - 5 \cdot 1} = 4$ ,  $R = 5 - 1 = 4$ , d.h.  $L = R$ .

Für  $x = 4$  ist  $L = \sqrt{21 - 5 \cdot 4} = 1$ ,  $R = 5 - 4 = 1$ , d.h.  $L = R$ . Es ist also  $L = R$ .

Die irrationale Gleichung (6) besitzt demnach die beiden Lösungen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 4$ .

Wir lösen noch die Gleichung

$$1 - \sqrt{7x - 19} = x \tag{7}$$

und isolieren zunächst den irrationalen Ausdruck

$$1 - x = \sqrt{7x - 19}$$

Anschließend quadrieren wir beide Seiten

$$1 - 2x + x^2 = 7x - 19$$

fassen zusammen und ordnen

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen  $x_1 = 4$  und  $x_2 = 5$ . Wir überprüfen, ob diese Werte Lösungen von (7) sind.

Für  $x = 4$  ist  $L = -2$ ;  $R = 4$ . Die linke Seite der Gleichung ist folglich nicht gleich der rechten Seite, d.h.,  $x = 4$  ist keine Lösung der Gleichung (7).

Für  $x = 5$  ist  $L = -3$ ;  $R = 5$ , d.h., auch in diesem Falle ist die linke Seite der Gleichung nicht gleich der rechten Seite, und das bedeutet, dass auch  $x = 5$  keine Lösung der Gleichung ist.

Die Gleichung

$$1 - \sqrt{7x - 19} = x$$

besitzt demnach keine Lösungen. Solche Gleichungen heißen nicht lösbar. Wir sagen, die Menge der Lösungen ist leer.

Bei den hier behandelten irrationalen Gleichungen haben wir jeweils beide Seiten quadriert und erhielten dadurch rationale Gleichungen, meistens zweiten Grades, die wir lösen konnten. Dabei sind wir aber nicht stehengeblieben.

In einem letzten Schritt haben wir überprüft, ob die Lösungen der durch Quadrieren beider Seiten erhaltenen rationalen Gleichungen auch wirklich Lösungen der irrationalen Gleichungen sind.

Dabei erlebten wir verschiedene Überraschungen: die Gleichung (2) wurde nur von einer der beiden Lösungen der rationalen Gleichung gelöst, Gleichung (6) von beiden, Gleichung (7) dagegen von keiner.

Bevor wir diese Überprüfung (die wir hier "Probe" nennen wollen) durchgeführt hatten,



konnten wir nicht wissen, welche "Überraschung" uns erwartete. Erst danach ließ sich entscheiden, wieviele Lösungen die irrationale Gleichung besitzt.

Bei der Lösung quadratischer Gleichungen war diese Probe überflüssig; wenn die Rechnung ohne Fehler durchgeführt wurde, konnte es keine "Überraschung" geben.

Es erhebt sich die Frage, welche Ursachen diese "Überraschungen" haben, d.h. warum diese Probe bei irrationalen Gleichungen notwendig ist, im Falle der quadratischen Gleichungen aber nicht.

Wir wollen uns bemühen, das an einem Beispiel zu erläutern. Die Gleichung ersten Grades

$$x = 3 \quad (8)$$

besitzt eine Lösung, natürlich  $x = 3$ . Erheben wir beide Seiten zum Quadrat, so erhalten wir die Gleichung

$$x^2 = 9 \quad (9)$$

die zwei Lösungen besitzt:  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = -3$ . Die Gleichung (9) ist also zur Gleichung (8) nicht äquivalent. Neben der Lösung  $x = 3$ , die die Gleichung (8) erfüllt, besitzt (9) noch eine Lösung  $x = -3$ , die nicht Lösung der Gleichung (8) ist.

Durch das Quadrieren beider Seiten von (8) haben wir Gleichung (9) erhalten, die mehr Lösungen besitzt als (8). Es erscheint daher verständlich, dass die "hinzugekommene" Lösung ( $x = -3$ ) als "fremde" Lösung die gegebene Gleichung nicht löst.

Wir können jetzt die gestellte Frage nach der Ursache der "Überraschungen" beantworten, die bei der Probe aufgetreten waren. Die Ursachen liegen im Quadrieren!

Deshalb muss die Probe der letzte Schritt bei der Lösung irrationaler Gleichungen sein. Sie entscheidet erst wirklich über die Lösungsmenge irrationaler Gleichungen.

Wir lösen jetzt eine Gleichung, die zwei irrationale Ausdrücke enthält, etwa

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} = 3 \quad (10)$$

Wir subtrahieren einen irrationalen Ausdruck auf beiden Seiten

$$\sqrt{2x-1} = 3 - \sqrt{x+3}$$

und quadrieren wieder:

$$2x - 1 = 9 - 6\sqrt{x+3} + x + 3$$

Jetzt addieren wir den noch verbliebenen irrationalen Ausdruck auf beiden Seiten

$$6\sqrt{x+3} = 13 - x$$

quadrieren nochmals

$$36(x+3) = 169 - 26x + x^2$$

fassen zusammen, ordnen und erhalten schließlich

$$x^2 - 62x + 61 = 0$$

mit den Lösungen  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 61$ .

Wir führen die Probe durch und überzeugen uns, dass nur  $x = 1$  eine Lösung der Ausgangsgleichung (10) ist. Man kann leicht feststellen, dass  $x = 61$  eine Lösung der irrationalen Gleichung

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3} = 3$$

ist. Diese Gleichung wird nun aber von  $x = 1$  nicht gelöst.

Wir erhöhen die Anzahl der irrationalen Ausdrücke in der Gleichung auf vier und lösen als Beispiel noch die Gleichung

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} = \sqrt{x+14} + \sqrt{x-1} \quad (11)$$

Wieder quadrieren wir beide Seiten der Gleichung

$$x+2 + x\sqrt{(x+2)(x+7)} + x+7 = x+14 + 2\sqrt{(x+14)(x-1)} + x-1$$

und haben dadurch nur noch zwei irrationale Ausdrücke; einen davon isolieren wir auf der linken Seite und erhalten

$$2\sqrt{(x+2)(x+7)} = 4 + 2\sqrt{(x+14)(x-1)}$$

Wir teilen beide Seiten durch 2 und führen die Multiplikationen unter den Wurzelzeichen aus

$$\sqrt{x^2 + 9x + 14} = 2 + \sqrt{x^2 + 13x - 14}$$

Anschließend quadrieren wir ein zweites Mal

$$x^2 + 9x + 14 = 4 + 4\sqrt{x^2 + 13x - 14} + x^2 + 13x - 14$$

Wir vereinfachen, isolieren das irrationale Glied

$$24 - 4x = 4\sqrt{x^2 + 13x - 14}$$

teilen durch 4

$$6 - x = \sqrt{x^2 + 13x - 14}$$

und quadrieren zum dritten Mal

$$36 - 12x + x^2 = x^2 + 13x - 14$$

Nach der Zusammenfassung folgt

$$25x = 50 \quad , \quad x = 2$$

Zum Schluss führen wir die Probe aus und setzen den Wert  $x = 2$  getrennt in die linke Seite (L) und in die rechte Seite (R) der Gleichung (11) ein:

$L = \sqrt{2+2} + \sqrt{2+7} = 5$ ;  $R = \sqrt{2+14} + \sqrt{2-1} = 5$ . Die linke Seite ist also gleich der rechten Seite der Gleichung, d.h.,  $x = 2$  ist Lösung von (11).

Die hier angewandte Lösungsmethode bestand darin, die ursprüngliche Gleichung in eine

für die Lösung einfachere Gleichung umzuformen (in den behandelten Beispielen haben wir von irrationalen Gleichungen ausgehend Gleichungen ersten oder zweiten Grades erhalten), die allerdings zur ursprünglichen Gleichung nicht mehr notwendig äquivalent war.

Es ergibt sich generell die Notwendigkeit der Probe, der Überprüfung an der jeweiligen Ausgangsgleichung.

### Übungen

Es sind folgende irrationale Gleichungen zu lösen!

71.  $\sqrt{x-2} = 3$

73.  $2\sqrt{x+1} - 5 = 0$

75.  $\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-3}$

77.  $\sqrt{x-1} + 2 = \sqrt{x+3}$

79.  $1 + \sqrt{7x-19} = x$

81.  $\sqrt{x^2-4x} = x-4$

83.  $10 + \sqrt{3x-2} = x$

85.  $\sqrt{2x+1} - 3 = \sqrt{x-8}$

87.  $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-4} = \sqrt{4x+5}$

89.  $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2} = \sqrt{x+13} - \sqrt{x+1}$

72.  $\sqrt{4-x} - 1 = 0$

74.  $\sqrt{3x-1} = 4\sqrt{5}$

76.  $2\sqrt{x+8} - \sqrt{x+35} = 0$

78.  $\sqrt{x+2} + 2 = \sqrt{x+18}$

80.  $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3} = 2$

82.  $\sqrt{x^2-6x} = 4-x$

84.  $\sqrt{1+\sqrt{x}} = 3$

86.  $\sqrt{x+5} = 7 - \sqrt{2x+8}$

88.  $\sqrt{3x} - \sqrt{7-x} = \sqrt{x-2}$

90. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 17 cm. Der Umfang des Dreiecks ist  $\frac{8}{3}$  größer als eine der Katheten. Es ist die Länge dieser Kathete zu berechnen (Hinweis in den Lösungen der Übungen)!

## 18 Lösungen der Übungen

1. a)  $x_{1,2} = \pm 35$ , b)  $x_{1,2} = \pm 3\sqrt{2}$ , c)  $x_{1,2} = \pm 1,8$ , d) die Gleichung hat keine Lösungen, e)  $x_{1,2} = \pm 30$ .

2. a)  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 8,5$ , b)  $x_1 = -7$ ;  $x_2 = 0$ , c)  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 0,09$ , d)  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 10000$ .

3. a)  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 1$ , b)  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 100$ , c)  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 1000$ , d)  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 1000000$ .

Die obigen Gleichungen haben eine gemeinsame Lösung:  $x_1 = 0$ . Ist  $a > 0$  und strebt gegen null, so wird die zweite Lösung der Gleichung  $ax^2 - x = 0$  immer größer (sie wächst unbeschränkt).

4. a)  $x_{1,2} = 7$ , b)  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 4\frac{2}{3}$ , c) die Gleichung hat keine Lösungen, d)  $x_1 = \frac{1}{6}$ ;  $x_2 = 1$ , e)  $x_1 = \frac{1}{3}$ ;  $x_2 = 3$ , f)  $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{17}$

5. a)  $x_{1,2} = \frac{1}{2}(\sqrt{17} \pm 3)$ , b)  $x_{1,2} = -\frac{3}{8}$ , c)  $x_1 = -101$ ;  $x_2 = 1$ .

6. a)  $x_1 = -3$ ;  $x_2 = 1$ , b)  $x_1 = -2001,5$ ;  $x_2 = 1,5$ , c)  $x_1 = -2000001,5$ ;  $x_2 = 1,5$ . Für b) und c) sind nur genäherte Werte angegeben.

7. Ist  $a > 0$  und strebt gegen null, so strebt eine Lösung zur Lösung der Gleichung  $2x - 3 = 0$ , d.h. gegen  $x = 1,5$  (vergleiche die Lösung  $x_2$  der Aufgaben a), b), c) der Übung 6); der absolute Betrag der zweiten Lösung wächst unbeschränkt.

8.a)  $x^2 - 10x + 21 = 0$ , b)  $x^2 + 4x - 12 = 0$ , c)  $x^2 + 11x + 10 = 0$ .

9.a)  $12x^2 - x - 6 = 0$ , b)  $x^2 - 4x + 1 = 0$ , c)  $x^2 + 3x + 1 = 0$ .

10.  $x^2 + 8x - 48 = 0$ .

11.  $x^2 + 2x - 3 = 0$ .

13. a)  $x_1 < 0$ ;  $x_2 > 0$ , wobei  $|x_1| < |x_2|$ , b) beide Lösungen sind positiv, c) die Gleichung hat keine Lösungen, d) beide Lösungen sind negativ, e) eine Doppellösung.

14. a)  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 3$ , b)  $x_1 = -5$ ;  $x_2 = -4$ , c)  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 14$ , d)  $x_1 = -3$ ;  $x_2 = 4$ , e)  $x_1 = -5$ ;  $x_2 = 2$ , f)  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 14$ .

15. a)  $x_1 = a$ ;  $x_2 = b$ , b)  $x_1 = 2p$ ;  $x_2 = -3q$ , c)  $x_1 = -4k$ ;  $x_2 = m$ .

16. Wenn auf einer Seitenlinie  $x$  Soldaten stehen, so enthält das ganze Quadrat  $x^2$  Soldaten; von diesem Quadrat wird das innere Quadrat mit  $(x - 6)$  Soldaten auf einer Seitenlinie abgezogen. Die Anzahl der Soldaten in dieser Einheit beträgt demnach  $x^2 - (x - 6)^2 = 12x - 36$ .

17. In einem System mit sechs Ziffern.

Hinweis: Wenn die Grundzahl des Systems mit  $x$  bezeichnet wird, so lässt sich die erste Zahl in der Form  $2x^2 + 0 \cdot x + 1 = 2x^2 + 1$ , die zweite Zahl in der Form  $4x^2 + 2x = 3$  darstellen.

18. 6 Klassen.

19. 15 Złoty.

20. a) für  $x = 7$  Minimum  $y = -21$ , b) für  $x = 2$  Maximum  $y = 0$ , c) für  $x = \frac{2}{5}$  Minimum  $y = 0$ , d) für  $x = 1$  Maximum  $y = -19$ , e) für  $x = -\frac{2}{3}$  Maximum  $y = -1$ , f) für  $x = -4$  Minimum  $y = -32$ .

21. a)  $y = 4(x + 1)(x + \frac{3}{4})$ , b)  $y = (x - 6)(x - 3)$ , c)  $y = (x + 8)(x - 2)$ , d)  $y = -(x + 1)(x - 3)$ , e)  $y = -2(x + 3)(x - 3)$ .

22. Nein. Eine Zerlegung ist nur möglich für  $m \leq -4$  und  $m \geq +4$ .

23. a)  $\frac{2x-3}{6x-1}$ , für  $x = 1$ , b)  $\frac{x-5}{3x+7}$  für  $x = 2$ .

26. Der Punkt  $A$  liegt im IV. Quadranten,  $B$  im III. Quadranten,  $C$  im I. Quadranten,  $D$  auf der  $y$ -Achse,  $E$  im II. Quadranten,  $F$  auf der  $x$ -Achse.

29. Die zweite Parabel ist um -4 in Richtung der  $x$ -Achse verschoben.

30. a) Die erste Parabel muss um +3 in Richtung der  $x$ -Achse verschoben werden.

b) Ist nicht möglich, denn die Parabeln sind nicht kongruent.

c) Die erste Parabel muss um +6 in Richtung der  $x$ -Achse und anschließend um -5 in Richtung der  $y$ -Achse verschoben werden.

31. a) in zwei Punkten, b) schneidet die  $x$ -Achse nicht, c) berührt die  $x$ -Achse, d) berührt die  $x$ -Achse, e) in zwei Punkten, f) in zwei Punkten, g) schneidet die  $x$ -Achse nicht.

32. Jede im Punkt  $(0, c)$ .

33. a) Die Funktionswerte sind negativ für alle Werte  $x$ , b)  $y > 0$  für  $x < 1$  und  $x > 14$ ,  $y < 0$  für  $1 < x < 14$ , c)  $y > 0$  für  $-10 < x < 10$ ,  $y < 0$  für  $x < -10$  und  $x > 10$ .

34.  $-1 < x < 10$ .

35. Für keinen Wert.

36. -1, 0, 1, 2.

37. 41, 43, 47, 53, 61 usw. Für  $x = 40$  ist  $y = 1601$ . Alle diese Zahlen sind Primzahlen, sie sind nur durch 1 und durch sich selbst teilbar. Wird dagegen  $x = 41$ , so ist  $y = 41^2$ , d.h. keine Primzahl.

38. Primzahlen.

39. a)  $x < -6$  oder  $x > -1$ , b) Für alle Werte mit Ausnahme von  $x = 9$ , c)  $-0,8 < x < 1$ , d)  $x < -3$  oder  $x > 3$ , e)  $-4 < x < 0$ .

40. Für  $x < 2$  oder  $x > 4$ , b)  $-3 < x < 4$ , c) für keinen Wert  $x$ , d) für alle Werte  $x$  mit der Ausnahme  $x = 0, 5$ .

41. a) 4, 5, 6, b) 0, c) für alle, d) für alle außer  $x = 2$  und  $x = 3$ , e) für keinen.
42. Für  $m = -2$ ,  $x_{1\text{ff}2} = -1$ ; für  $m = +2$ ,  $x_{1,2} = +1$ .
43. Für  $m < -4$  oder für  $m > +4$ .
44. Für  $m = 0$  ist  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 1$ ; für  $m = 1$  ist  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 2$ .
45. Der ältere hatte 31, der jüngere 35 Hefte.
47.  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 6$ ;  $x_2 = 6$ ,  $y_2 = 2$ .
48.  $x_1 = 8$ ,  $y_1 = 6$ ;  $x_2 = -4$ ,  $y_2 = -12$ .
49.  $x_1 = 4$ ,  $y_1 = 0$ ;  $x_2 = 0$ ,  $y_2 = 4$ .
50.  $x_1 = 3, 6$ ,  $y_1 = 4, 8$ ;  $x_2 = -3, 6$ ,  $y_2 = -4, 8$ .
51.  $x_1 = 14$ ,  $y_1 = 4$ ;  $x_2 = -1$ ,  $y_2 = -11$ .
52.  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 15$ ;  $x_2 = 15$ ,  $y_2 = 2$ .
53.  $x_1 = \sqrt{3} + 1$ ,  $y_1 = \sqrt{3} - 1$ ;  $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ ,  $y_2 = -1 - \sqrt{3}$ .
54.  $x_1 = 24 - 4\sqrt{33}$ ,  $y_1 = 24 + 4\sqrt{33}$ ;  $x_2 = 24 + 4\sqrt{33}$ ,  $y_2 = 24 - 4\sqrt{33}$ .
55.  $x_1 = 2\frac{1}{3}$ ,  $y_1 = -1\frac{1}{4}$ .
56.  $x_1 = 6$ ,  $y_1 = 3$ .
57. Widersprüchlich, nicht lösbar.
58.  $x_1 = 5$ ,  $y_1 = 6$ ;  $x_2 = 6$ ,  $y_2 = 5$ .
59.  $x_1 = 3$ ,  $y_1 = 4$ ;  $x_2 = \frac{40}{11}$ ,  $y_2 = \frac{30}{11}$ .
60.  $x_1 = 3$ ,  $y_1 = 5$ ;  $x_2 = 1$ ,  $y_2 = 3$ .
61. Unterbestimmtes System; dem System genügen alle Zahlenpaare, die die Gleichung  $2x + y = 3$  erfüllen.
62. Hinweis: 1 Beide Gleichungen addieren.  $x_1 = 3$ ,  $y_1 = 1$ ;  $x_2 = -3$ ,  $y_2 = -1$ .
63.  $x_1 = 7$ ,  $y_1 = 5$ ;  $x_2 = -7$ ,  $y_2 = -5$ .
64.  $x_1 = \sqrt{21}$ ,  $y_1 = 3$ ;  $x_2 = -\sqrt{21}$ ,  $y_2 = 3$ ;  $x_3 = \sqrt{37}$ ,  $y_3 = -5$ ;  $x_4 = \sqrt{37}$ ,  $y_4 = -5$ .
65.  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = -2$ ;  $x_2 = -\frac{19}{28}$ ,  $y_2 = -\frac{11}{28}$ .
66. 2 und 7, -2 und -7.
67. 15 und 10, -15 und -10.
68. 7 und 5, -5 und -7 (die Reihenfolge nicht verändern).
69. Umfang des Vorderrades 2 m, des Hinterrades 2,5 m.

70. 12 cm und 16 cm.

71.  $x = 11$ .

72.  $x = 3$ .

73.  $x = 5, 25$ .

74.  $x = 27$ .

75.  $x = 6$ .

76.  $x = 1$ .

77.  $x = 1$ .

78.  $x = 7$ .

79.  $x_1 = 4; x_2 = 5$ .

80.  $x = -1$ .

81.  $x = 4$ .

82. Hat keine Lösungen.

83.  $x = 17$ .

84.  $x = 64$ .

85.  $x_1 = 12; x_2 = 24$ .

86.  $x = 4$ .

87.  $x = 5$ .

88.  $x_1 = 3; x_2 = 2\frac{1}{13}$ .

89.  $x = 3$ .

90. Hinweis: Es sei  $x$  die Länge der gesuchten Kathete, dann beträgt die Länge der zweiten Kathete  $\sqrt{17^2 - x^2}$ . Nun berechnen wir den Umfang usw.  $x = 15$ .